Vektoranalizis

Datz Daniel

2011.06.27.

1 Deriválási fogalmak

1.1 Skalármező deriváltja, a gradiens

Definició 1.1.1 (Gradiens) *Legyen $\varphi : R^3 \to R$ skalármező. Ekkor φ gradiense $\mathbf{r_0}$ pontban az $a \in R^3$ vektor, ha*

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r_0}} \frac{\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r_0}) - a \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r_0})}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r_0}\|} = 0.$$

Ekkor φ r_0–ban differenciálhato, gardiensét grad φ–vel jelöljük, és

$$grad\varphi(\mathbf{r_0}) = \begin{pmatrix} \partial_x\varphi(\mathbf{r_0}) \\ \partial_y\varphi(\mathbf{r_0}) \\ \partial_z\varphi(\mathbf{r_0}) \end{pmatrix}$$

A gradiens, mint differenciál operátor, homogén, lineáris leképezés, illetve ha f egy egyváltozós differenciálható függvény:

$$grad(f(\varphi)) = f'(\varphi)grad\varphi$$

(ez a láncszabály)

Definició 1.1.2 (Szintfelület) *Egy skalármező szintfelületein (nivófelületein) a következő ponthalmazokat értjük:*

$$\Upsilon = \{(x, y, z) \in R^3 | \varphi(x, y, z) = c\}$$

Természetesen nem minding beszélhetünk összefüggő felületröl, elöfordulhatnak diszkrét pontok halmazai, stb. $\varphi(r)$ értelemzési tartományának minden pontján egy, és csak egy szintfelület mehet át.

Tétel 1.1.1 *A gradiens minden pontban merőleges az adott pontban átmenő szintfelületre.*

Bizonyítás 1.1.1 *Legyen $\varphi(\mathbf{r_0}) = c$, és tekintsük a $\varphi(r) = c$ a szintfelületet. Legyen r(t) a szintfelület görbéje, ahol r(0) = r_0. Ekkor a differenciálás definíciója alapján*

$$\varphi(r) - \varphi(\mathbf{r_0}) = (grad(\varphi))(r - \mathbf{r_0}) + \varepsilon(r),$$

ahol

$$\lim_{r\to\mathbf{r_0}} \frac{\varepsilon(r)}{|r - \mathbf{r_0}|} = 0$$

Ezért t–vel való osztás után határ értékben ezt kapjuk:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(r)-\varphi(r_0)}{t}=(grad\,\varphi)\lim_{t\to 0}\frac{r(t)-r(0)}{t}=(grad\,\varphi)(r'(0))=0$$

Ez csak úgy lehet, ha az r(t) görbe érintői merőlegesek a $grad\,\varphi$ *vektorra.*

1.2 Iránymenti derivált

Legyen adott egy tetszőleges $\underline{v}$ egységvektor. Ez az egységvektor, es az értelemezési tartomány egy P_0 pontja meghatároz egy egyenest r(t) = $P_0+t\underline{v}$ egyenlet szerint. Ennek az egyenesnek $\underline{v}$ irányvektora, P_0 pont pedig az egyenesen van. Ekkor ezen egyenes mentén a φ felület összes pontja kifejezhető $\varphi(r(t))$ alakban, tehát az egyenes mentén közönséges egyváltozós függvénynek vehető. A kérdés a függvény deriváltja t = 0 esetben.

Definició 1.2.1 (Iránymenti derivált) *Legyen* $v\in R^3, \|v\|=1$ *tetszőleges egységvektor. A* $\varphi(r)$ *skalármező* v *irány szerinti* $r_0\in R^3$ *pontban való deriváltján a következő határértéket értjük:*

$$D_v\varphi(r_0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(r_0+tv)-\varphi(r_0)}{t}$$

Nyilvánvaló, hogy ez az eddig megismert parciális deriválás kiterjesztése, hiszen a standard bázis egységvektorait választva irányként, épp az adott parciális deriváltakat kapjuk.

Tétel 1.2.1 $D_v\varphi(r_0)=grad\,\varphi(r_0)\cdot\underline{v}$.

Bizonyítás 1.2.1 *A definició alapján*

$$D_v\varphi(r_0)=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(r_0+tv)-\varphi(r_0)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(r_0+tv)-\varphi(r_0)-grad\varphi(r_0)\cdot t\underline{v}}{t}+grad\varphi(r_0)\cdot\underline{v}=grad\varphi(r_0)\cdot\underline{v}$$

Ebből az is látszik (elvégezve a skalárszorzást), hogy $grad\varphi(r_0)\cdot\underline{v}=v_1\partial_x\varphi+v_2\partial_y\varphi+v_3\partial_z\varphi$, ahol v_1,v_2 es v_3 a $\underline{v}$ vektor koordinátai. Következésképpen $|D_v\varphi(r_0)|\leq\|grad\varphi(r_0)\|\cdot\|\underline{v}\|=\|grad\varphi(r_0)\|$, vagyis az iránymenti derivált a gradiens irányába a legnagyobb. Az iránymenti derivált tulajdonságai: lineáris, továbbá

$$D_v(\varphi+\psi)=D_v\varphi+D_v\psi$$

$$D_{\alpha v+\beta w}\varphi=\alpha D_v\varphi+\beta D_w\varphi,$$

illetve a láncszabály:

$$D_v(F(\varphi))=F'(\varphi)\cdot D_v\varphi.$$

1.3 A vektormező

Definició 1.3.1 *Azt az F függvényt, amely a tér minden pontjához egy jól meghatározott* $\underline{v}$ *vektort rendel hozzá, vektormezőnek nevezzük. Általános alakja:* $F(r) = \begin{pmatrix} f_1(r) \\ f_2(r) \\ f_3(r) \end{pmatrix}$, *ahol* f_1, f_2 *és* f_3 *skalármezők, az F vektormező koordináta függvényei.*

Definició 1.3.2 *Az F vektormező akkor differenciálható* r_0*–ban, ha létezik olyan A lineáris leképezés (3 x 3 mátrix), melyre*

$$\lim_{r \to r_0} \frac{F(r) - F(r_0) - \mathbf{A}(r - r_0)}{\|r - r_0\|} = 0$$

A neve derivált tenzor. F(r) vektormező pontosan akkor differenciálható, ha koordináta függvényei mind differenciálhatók. Ekkor A alakja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 & \partial_z f_1 \\ \partial_x f_1 & \partial_y f_2 & \partial_z f_2 \\ \partial_x f_1 & \partial_y f_3 & \partial_z f_3 \end{pmatrix}$$

1.4 A nabla operátor, differenciáloperátorok

Vezessük be a szimbolikus nabla vektort (operátort) a következő alakban:

Definició 1.4.1 (Nabla operátor)

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Azonnal látszik, hogy $grad\varphi = \nabla\varphi$ Ezután vezessük be a divergencia (div) es rotáció (rot) differenciáloperátorokat, a következő definicő szerint:

Definició 1.4.2 *Legyen* $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ *vektormező,* f_1, f_2, f_3 *differenciálhatóak.*
Ekkor:
Divergencia: $divF = \nabla \cdot F$, *es*
Rotáció: $rotF = \nabla \times F$, *ahol a pont es a kereszt a megszokott skalárszorzat és vektoriális szorzatot jelentik (utóbbi esetben a számolást is a megszokott módon, determinánssal a legegyszerübb végrehajtani).*

Érdekes kérdés, hogy a vizsgált vektormező mikor adódott valamilyen differenciáloperátor végeredményeként. A vektormezőt ekkor potenciálosnak mondjuk. Két esetet lehet megkülönböztetni:

Definició 1.4.3 *Egy F vektormezőt skalárpotenciálosnak mondunk, ha létezik olyan* φ *skalártér, melyre grad* $\varphi = F$

Definició 1.4.4 *Egy vektormezőt vektorpotenciálosnak mondunk, ha létezik G vektormező, melyre rot* $G = F$.

Könnyen bizonyítható, hogy a skalárpotenciálos vektormezők rotacióvektora nullvektor, illetve a vektorpotenciálos vektormezők divergenciája is zérusvektor:

$$rot\ grad\ \varphi = 0 \qquad div\ rot\ G = 0$$

2 Skalár es vektormező integrálása

Csak érintőlegesen, további magyarázat nélkül megemlítjük a vonalintegrált, felületi integrált skalármező és vektormező esetében is:

2.1 Vonalintegrál, felületi integrál

Az f függvény vonalintegrálja Γ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} f dr = \int_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt$$

Az F vektormező vonalintegrálja a Γ görbe mentén:

$$\int_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r} = \int_{a}^{b} \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt$$

A φ skalármező felülelti integrálja az S fekületen:

$$\int_{S} \varphi \, dS = \int \int_{T} \varphi(r(u,v))|r_u \times r_v| \, du \, dv$$

Az F vektromező felületi integrálja az S felületen:

$$\int \int_{S} F(\underline{r})dS(\underline{r}) = \int \int_{D} \langle F(s(u,v)), \frac{\partial s}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial s}{\partial v}(u,v)\rangle d(u,v)$$

3 Integrálátalakító tételek

3.1 Newton – Leibniz tétel

Tétel 3.1.1 (Newton – Leibniz formula) *Legyen f valós, integrálható függvény amelynek létezik F primitiv függvénye. Ekkor*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$$

A további tételek tekinthetők ezen formula általanosításainak, hiszen a lényegük is ugyanaz: egy adott intervallumon (szakasz, terület, térfogat, stb) vett integrált, az intervallum határára vonatkozó integrállá alakítunk át. Ez szakasz esetében két pont(N – L form.), felületnél górbe, térfogatnál felület, stb.

3.2 Gauss – Osztrogradszkij tétel

Tétel 3.2.1 (Gauss – Osztrogradszkij tétel) *Ha F vektormező S felülettel határolt V térfogat minden belső pontjában, illetve a határon is folytonosan differenciálható, továbbá minden felületi pontban létezik a testből kifelé mutató $\underline{n}$ felületi normálvektor, akkor teljesül a következő:*

$$\int \int_{S} F \cdot \underline{n} \, dS = \int \int_{V} \int div \; F \; d(x,y,z)$$

A tétel akkor is érvényben marad, ha az F felület nem minden pontjában létezik felületi normális, de ki kell kötnünk, hogy azok a pontok, ahol az m nem létezik (vagy nem folytonos), nullmértékü halmazt alkotnak.

Tétel 3.2.2 *Legyen F folytonosan differenciálható vektormező, S_n egyszerű, zárt, egymásba ágyazott felületek sorozata, amelyek $(x_0.y_0, z_0)$ pontba zsugorodik (vagyis $\forall$ n – re $r_0 \in S_n$, és $\lim_{n\to\infty} V(S_n) = 0$), akkor F vektormezö $V(S_n)$-ekre vonatkozó átlagos forráserősségeinek sorozata konvergens és a divergenciához tart*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{V(S_n)} \int\int_{S_n} F\, dS = divF(r_0)$$

,ahol $V(S_n)$ az S_n zart felület által határolt térrész térfogata.

Ez a tétel teszi lehetővé a divergencia szemléletes jelentésének megfogalmazását: lokális forráserősség sűrűség.

3.3 Stokes tétel

Tétel 3.3.1 (Stokes – tétel) *Ha F vektromezö a Γ zárt görbével határolt, egyszeresen összefüggő, irányitható S felületen es annál határvonalan folytonosan differenciálható, $\underline{T}$ pedig a görbe pontjaihoz rendelt tangenciális (érintöirányú) normálvektor akkor*

$$\oint_\Gamma F \cdot \underline{T}\, dr = \int\int_S rot\, F\, dS$$

Ez alapján megfogalmazható a rotációő szemlélétes jelentése is: lokalis örvényerőség.

Tétel 3.3.2 *Legyen adott egy S felület és annak egy r_0 pontjában a felület egy $\underline{n}$ normálegységvektora. Tekintsünk ezen az S felületen egy egyszerü, zárt felületi görbékből álló γ_n sorozatot, amely az r_0 pont körül zsugorodik össze. Legyen F folytonosan differenciálható vektormező. Ekkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A(S_n)} \oint_{\gamma_n} F \cdot \underline{T}\, dr = rot\, F(r_0) \cdot \underline{n}$$

ahol A(S_n) a γ_n zárt görbe által határolt S_n felületdarab felszine.

3.4 Green formula

Tétel 3.4.1 *Legyen S egyszerű, zárt felület, kifelé mutató normálvektorral, V pedig S által körülhatárolt térrész. Ha φ , ψ kétszer folytonosan differenciálható skalármező, akkor*

$$\int\int_S (\varphi grad\psi - \psi grad\varphi) dS = \int_V (\varphi \triangle \psi - \psi \triangle \varphi) dV$$

ahol $\triangle$ a Laplace operátor: $\triangle = \nabla \cdot \nabla$.