Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

Taylor formula, integrál alakú maradéktaggal

2014. március 31.

Az Analízis II. jegyzet 72. oldalán levő másodrendű Taylor formula bizonyítását adjuk meg a megfelelő egyvátozós Taylor formula alapján. Itt a Lagrange féle maradéktag integrál alakját használjuk.

1. Tétel. *(Általános másodrendű Taylor-formula.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ n-változós, kétszer differenciálható függvény, $S \subset \mathbb{R}^n$ és $x \in \text{int S}$ rögzített pont. Ekkor tetszőleges $(x + h) \in S$ esetén*

$$f(x+h) = f(x) + grad\ f(x)\ h + \frac{1}{2} h^T \left(\int_0^1 (1-t)\ H(x+th)\ dt \right) h$$

ahol

$$h^T = (h_1, \dots, h_n), \qquad grad\ f(x) = (f'_{x_1}(x), \dots, f'_{x_n}(x)),$$

és $H(x+th)$ a Hesse mátrix az adott helyen. Tehát a Lagrange-féle maradéktag így írható:

$$L_1 = \frac{1}{2} h^T \left(\int_0^1 (1-t)\ H(x+th)\ dt \right) h.$$

A tétel bizonyítása a valós változós függvényekre vonatkozó megfelelő tétel következménye.

1. Lemma. *(Elsőrendű Taylor formula, integrál maradéktaggal) Adott $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény, $a < x_0 < b$ rögzített (="kiválasztott pont"). Ekkor minden $x \in (a,\ b)$ esetén:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_{x_0}^{x} (x - t) f''(t) dt.$$

Tehát az L_1 Lagrange-féle maradéktag így is írható:

$$L_1 = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \int_{x_0}^{x} (x - t) f''(t) dt.$$

Bizonyítás. A Newton-Leibniz formula szerint:

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(s)ds.$$

Ezért

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} (f'(s) - f'(x_0))ds.$$

A jobb oldalon az integrandusra újra alkalmazzuk a N-L formulát, és így folytathatjuk:

$$\int_{x_0}^{x} (f'(s) - f'(x_0))ds = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{s} f''(t)dt \right) ds.$$

A kettős integrál integrálási tartománya egy háromszög alakú tartomány, ahol az integrálási sorrendet fel lehet cserélni a megfelelő változtatásokkal együtt. Nevezetesen:

$$\int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{s} f''(t)dt\, ds = \int_{x_0}^{x} \int_{t}^{x} f''(t)ds\, dt = \int_{x_0}^{x} f''(t) \int_{t}^{x} 1\ ds\, dt.$$

A belső integrál éréke:

$$\int_{t}^{x} 1\ ds = x - t,$$

ezzel épp a kivánt formulát kaptuk.

A Tétel bizonyítása. Definiáljuk az $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$ egyváltozós valós függvényt:

$$F(t) = f(x + t\dot{h}). \qquad F(0) = f(x),\ F(1) = f(x + h).$$

Az F függvényre alkalmazva a fenti lemmát ezt kapjuk:

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1 - 0) + \frac{1}{2}(1 - 0)^2 \int_{0}^{1} (1 - t)F''(t)\ dt.$$

Az előadáson beláttuk, hogy

$$F'(0) = \text{grad } f(x)\ h, \qquad F''(t) = h^T H(x + th)h,$$

amiből a Tétel állítása következik.