1. fejezet

Valós számok

1.1. Valós számok

1.1.1. Teljes indukció

Igazoljuk a teljes indukcióval a következő állítások helyességét:

1.1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

1.2 $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2.$

$\boxed{\textbf{1.3}}$ a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1.$

b) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \qquad (n \geq 2).$

1.4 $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

1.5 $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

$\boxed{\textbf{1.6}}$ $\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos 2^2 x \ldots \cos 2^n x = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}.$

$\boxed{\textbf{1.7}}$ $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ osztható 133-mal.

1.8 $4^n + 15n - 1$ osztható 9-cel.

1.9 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$

1.1.2. Egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

1.10 $\dfrac{37 - 2x}{3} + 9 \leq \dfrac{3x - 8}{4}.$

1.11 $8x - 4x^2 < 3.$

1.12 $x^2 + 5x - 14 \geq 0.$

1.13 $x^2 - 3x - 4 \leq 0.$

1.14 $(x^3 - 1)(x - 1) \geq 0.$

1.15 $\dfrac{x - 5}{x + 3} > 0.$

$\boxed{\mathbf{1.16}}$ $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}} > 1.$

1.17 $|2x-3| < 2.$

1.18 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right| \leq 1.$

1.19 $\dfrac{|x+2|}{|x-1|} \geq 1.$

1.20 $|3\lg x - 1| < 2.$

$\boxed{\mathbf{1.21}}$ $\sin|2x-4| < \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

1.1.3. Közepek

Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával a következő állításokat:

1.22 a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$

b) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 4 \qquad (n \in \mathbb{N})$

1.23 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i}\right) \geq n^2 \qquad (n \in \mathbb{N},\ a_i > 0)$

1.24 $n\,! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$

1.25 a) $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a) \geq 8abc \qquad (a,b,c > 0)$

b) $(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a) \leq \dfrac{8}{27}\cdot(a+b+c)^3 \qquad (a,b,c > 0)$

Oldjuk meg a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával az alábbi szélsőérték-feladatokat.

$\boxed{\mathbf{1.26}}$ Adott $k > 0$ kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb?

$\boxed{\mathbf{1.27}}$ Egy folyó partján adott $l > 0$ hosszúságú kerítéssel egy téglalap alakú telket szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a telek egyik határa a folyópart (ott nem kell kerítés). Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a telek területe a lehető legnagyobb legyen?

$\boxed{\mathbf{1.28}}$ Hogyan válasszuk meg egy felülről nyitott, henger alakú edény méreteit, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség?

További közepekkel kapcsolatos feladatok:

1.29 Igazolja a mértani és a harmonikus közép közti egyenlőtlenségről szóló tételt:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ a_i > 0),$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

Megjegyzés: a bal oldalon álló mennyiséget az $a_1, \ldots, a_n$ számok harmonikus közepének nevezzük.

$\boxed{\textbf{1.30}}$ Igazolja a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenségről szóló tételt:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \ge 2,\ a_i \ge 0),$$

és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

1.31 Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, és jelölje m az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok közül a legkisebbet, M pedig a legnagyobbat. Jelölje továbbá H_n ugyanezen számok harmonikus közepét, G_n a mértani közepét, A_n a számtani közepét, Q_n pedig a négyzetes közepét. Igazolja, hogy mind a négy közép m és M közé esik, azaz, hogy

$$m \le H_n \le M, \qquad m \le G_n \le M, \qquad m \le A_n \le M, \qquad m \le Q_n \le M\,,$$

továbbá ha az $a_1, \ldots, a_n$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$m < H_n < M, \qquad m < G_n < M, \qquad m < A_n < M, \qquad m < Q_n < M\,.$$

1.1.4. Számhalmazok

Vizsgáljuk meg az alábbi halmazokat korlátosság, alsó és felső határ, legkisebb és legnagyobb elem szempontjából:

$\boxed{\textbf{1.32}}$ $H = \left\{ \dfrac{4n-2}{2n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1.33 $H = \left\{ \dfrac{5n+3}{3n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

$\boxed{\textbf{1.34}}$ $H = \left\{ \dfrac{n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1.35 $H = \left\{ \dfrac{3n+5}{n-3} \mid n \in \mathbb{N},\ n \ge 4 \right\}$