Tartalomjegyzék

3. fejezet

Valós függvények

3.1. Valós függvények

3.1.1. Bevezető feladatok

Mivel egyenlő?

3.1 $\sin\Big(\arcsin(x)\Big)$

3.2 $\sin\Big(\arccos(x)\Big)$

$\boxed{\textbf{3.3}}$ $\sin\Big(2\arccos(x)\Big)$

3.4 $\operatorname{tg}\Big(\arccos(x)\Big)$

3.5 $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin(x)\right)$

$\boxed{\textbf{3.6}}$ $\sin\Big(\operatorname{arc\,tg}(2,4)\Big)$

$\boxed{\textbf{3.7}}$ $\operatorname{sh}(2)$

3.8 $\operatorname{ch}(3)$

$\boxed{\textbf{3.9}}$ $\operatorname{ch}(2x)$, ha $\operatorname{sh}(x) = 1$.

$\boxed{\textbf{3.10}}$ $\operatorname{arsh}(4)$

$\boxed{\textbf{3.11}}$ $\operatorname{arch}(5)$

$\boxed{\textbf{3.12}}$ $\operatorname{arth}(-0,6)$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát:

$\boxed{\textbf{3.13}}$

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

3.14

$$y = \sqrt{3-2x}$$

3.15

$$y = \frac{2x-3}{x+2}$$

3.16

$$y = \frac{x+1}{x^2-3x}$$

$\boxed{\textbf{3.17}}$

$$y = \ln(x^2 - 3x + 2)$$

$\boxed{\textbf{3.18}}$

$$y = \sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$$

3.19

$$y = \arcsin\frac{3-2x}{5}$$

3.20

$$y = 2\arccos\sqrt{9-x^2}$$

3.21

$$y = \ln\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+16}$$

3.22

$$y = \ln(\ln x)$$

Rajzoljuk meg a következő függvények görbéit.

3.23

$$y = \frac{x}{x-1}$$

3.24

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

3.25

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

3.26

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

3.27

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

3.28

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

3.29

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

3.30

$$y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

3.31

$$y = e^{-x^2}$$

3.32

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

3.33

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3.34

$$y = \arcsin(\sin(x))$$

3.35

$$y = \arccos(\cos(x))$$

3.36

$$y = \arctan(\mathrm{tg}\,(x))$$

3.37

$$y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Határozzuk meg a következő függvények inverz függvényét.

3.38

$$y = 1 - 2x$$

3.39

$$y = 1 + x$$

3.40

$$y = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$$

3.41

$$y = \frac{1}{1-x}$$

3.42

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad (x \geq 0)$$

3.43

$$y = \sqrt{x^2 - 16} \quad (x \geq 0)$$

3.44

$$y = \sqrt{3 - x}$$

3.45

$$y = \frac{2x+3}{x+1}$$

3.46

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \quad (x \geq 2)$$

3.47

$$y = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{1 + \sqrt{1+4x}}$$

3.1.2. Határérték

Határozzuk meg a következő függvények határértékét az adott pontban.

3.48

$$\lim_{x \to 2} (x^3 - x^2 - x + 1)$$

3.49

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} \quad (k \in \mathbb{N} \text{ rögzített})$$

3.50

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

3.51

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

3.52

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$

$\boxed{\textbf{3.53}}$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x^2 - x - 2}$$

3.54

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}$$

3.55

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}$$

3.56

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

3.57

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$$

3.58

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1} \quad (n\in\mathbb{Z} \text{ rögzített})$$

3.59

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

3.60

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^3-1}\right)$$

$\boxed{\textbf{3.61}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

$\boxed{\textbf{3.62}}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$$

3.63

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

3.64

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$$

$\boxed{\textbf{3.65}}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[10]{x^7}+1963-\sqrt{x}}$$

$\boxed{\textbf{3.66}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

3.67

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$$

$\boxed{\textbf{3.68}}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$\boxed{\textbf{3.69}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

3.70

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

3.71

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

3.72

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

3.73

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$$

$\boxed{\textbf{3.74}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$$

3.75

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$$

3.76

$$\lim_{x\to 1}\frac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

3.77

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

3.78

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}}$$

3.79

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

3.80

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}$$

$\boxed{\textbf{3.81}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(mx)}{nx},\quad n,m\in\mathbb{N}\text{ rögzített.}$$

$\boxed{\textbf{3.82}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{\sin(bx)},\quad a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0\text{ rögzített.}$$

$\boxed{\textbf{3.83}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(x)}$$

3.84

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}(x)$$

$\boxed{\textbf{3.85}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

3.86

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

$\boxed{\textbf{3.87}}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$

3.88

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin(x)}{x^3}$$

3.89

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{1-\sin(x)-\cos(x)}$$

$\boxed{\textbf{3.90}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x^3)}}{1-\cos(x)}$$

3.91

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}(2x))\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

3.92

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2(x)+\sin(x)-1}{2\sin^2(x)-3\sin(x)+1}$$

$\boxed{\textbf{3.93}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$$

3.94

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{\operatorname{tg}^3 x-\sin^3(x)}$$

$\boxed{\textbf{3.95}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}$$

3.96

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x)}$$

$\boxed{\textbf{3.97}}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos(x)}$$

3.98

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sin(x)}$$

3.1.3. Függvény deriválás

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

3.99 $f(x) = 4x^3 - x^2 + 7$

3.100 $f(x) = (x^3 - 3)\sin(x)$

3.101 $f(x) = \dfrac{x^3 + 3}{(x^2 + x + 1)\cos(x)}$

$\boxed{\textbf{3.102}}$ $f(x) = \sin^2(x)$

3.103 $f(x) = \sin(x^2)$

3.104 $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 8)$

3.105 $f(x) = (x^4 - 6x + 1)^6 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$

3.106 $f(x) = \dfrac{\cos(x^4)}{2 + \sin^3 x}$

3.107 $f(x) = \operatorname{tg}^2(x^2)$

3.108 $f(x) = \sin^3\left(\dfrac{1 + x^2}{\operatorname{tg} 2x}\right)$

3.109 $f(x) = 10^{\sin(x^3)}$

3.110 $f(x) = e^{-x^2}$

3.111 $f(x) = \pi^{\sin(x)}$

$\boxed{\textbf{3.112}}$ $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

3.113 $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$

$\boxed{\textbf{3.114}}$ $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

3.115 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{tg} 3x}{x^2 - 1}}$

3.116 $f(x) = \sqrt{\lg(1 + \sin^2(2x))}$

3.117 $f(x) = \operatorname{sh}[x^3 - \ln(x + 7)]$

3.118 $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$

3.119 $f(x) = 2^{5 \arcsin x}$

3.120 $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

$\boxed{\textbf{3.121}}$ $f(x) = \operatorname{ar\,ch} \sqrt{x + 1}$

$\boxed{\textbf{3.122}}$ $f(x) = e^{\operatorname{ar\,th} x^2}$

3.123 $f(x) = \sqrt[11]{2 - \sqrt[3]{x}}$

Határozzuk meg az alábbi *implicit módon megadott* ($y = f(x)$) függvények deriváltját.

$\boxed{\textbf{3.124}}$ $x^2 + y^2 = 1$

$\boxed{\textbf{3.125}}$ $\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)} + \dfrac{\sin(y)}{\cos(x)} = 1$

$\boxed{\textbf{3.126}}$ $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

3.127 $(x-1)\cos(y)+\cos(2y)=0$

$\boxed{\textbf{3.128}}$ $y^x = x^y$

3.129 $f(x) = x + \operatorname{arc\,tg} f(x)$

$\boxed{\textbf{3.130}}$ $f(x) = (1+x)^{(1-x)}$

3.1.4. Taylor polinom

Írjuk fel az alábbi függvényeknek a megadott x_0 helyhez tartozó, megadott rendű Taylor polinomját.

$\boxed{\textbf{3.131}}$

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = e, \quad T_4(x) = ?$$

3.132

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 2, \quad T_4(x) = ?$$

3.133

$$f(x) = \operatorname{tg}(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.134}}$

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

3.135

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x), \quad x_0 = 1, \quad T_4(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.136}}$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5, \quad x_0 = 2, \quad T_3(x) = ?$$

3.137

$$f(x) = 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6, \quad x_0 = 1, \quad T_6(x) = ?$$

3.138

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 10, \quad x_0 = 1, \quad T_5(x) = ?$$

Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó, megadott rendű Taylor polinomját.

3.139

$$f(x) = e^{2x}, \quad T_4(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.140}}$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x), \quad T_6(x) = ?$$

3.141

$$f(x) = \cos(2x), \quad T_5(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.142}}$

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad T_3(x) = ?$$

3.143

$$f(x) = \ln(1+x), \quad T_n(x) = ?$$

3.144

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad T_n(x) = ?$$

$\boxed{\textbf{3.145}}$ Mekkora hibát követünk el, ha az $y = \sin(x)$ függvény értékét a $[0, 1]$ intervallumon a

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Taylor polinommal közelítjük?

$\boxed{\textbf{3.146}}$ Határozzuk meg az e szám értékét két tizedesjegy pontossággal Taylor polinom segítségével!

3.1.5. Határérték meghatározása L'Hospital szabállyal

$\boxed{\textbf{3.147}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

3.148 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$

3.149 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-1}{\sin 4x}$

3.150 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin(x)}$

$\boxed{\textbf{3.151}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}$

3.152 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x)-x}{x-\sin(x)}$

3.153 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}}$

3.154 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x)-\sin^2 x}{1-e^{-x^2}}$

3.155 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-xe^{\cos(x)}}{1-\sin(x)-\cos(x)}$

$\boxed{\textbf{3.156}}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln\sin(x)}$

3.157 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

$\boxed{\textbf{3.158}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{a}{x} \quad (a\in\mathbb{R}\text{ rögzített})$

3.159 $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

3.160 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

3.161 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x-\dfrac{1}{x}\right)$

$\boxed{\textbf{3.162}}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\operatorname{tg}(x)}$

3.163 $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg}(x)}$

3.164 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}(x))^{2x-\pi}$

3.165 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)}$

3.166

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$$

3.167

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$$

3.168

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^x$$

3.169

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$$

3.170

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$$

3.171

$$\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}(x))^{\operatorname{ctg} x}$$

3.1.6. Síkbeli görbe érintője

$\boxed{\textbf{3.172}}$ Határozzuk meg az $y = 3x - x^2$ parabola $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!

$\boxed{\textbf{3.173}}$ Hol metszi az $y = \ln x$ görbe $x = e$ abszcisszájú pontjához húzott érintője az x tengelyt?

$\boxed{\textbf{3.174}}$ Határozzuk meg az $y = \operatorname{tg}(x)$ görbének azt a pontját, melyhez tartozó érintő párhuzamos az $y = 2x - 5$ egyenessel!

3.175 Határozzuk meg az $y = x^3 - 6x + 1526$ görbének azokat a pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az $y = 6(x - \pi)$ egyenessel!

3.176 Bizonyítsuk be, hogy az $xy = a^2$ görbe (ahol $a > 0$ adott) bármely pontjához húzott érintője és a koordináta tengelyek által alkotott háromszög területe független az érintési ponttól!

$\boxed{\textbf{3.177}}$ Írjuk fel az $y = \operatorname{tg}(x)$ görbe $x = \dfrac{\pi}{4}$ abszcisszájú pontjához tartozó normálisának egyenletét. (A függvény görbe P pontjához tartozó normálisa az az egyenes, amely a ponthoz húzott érintőre merőleges.)

$\boxed{\textbf{3.178}}$ Határozzuk meg az $y^3 - 3x^2 - 4xy + 3 = 0$ implicit alakban adott függvény görbéjének $x = 1$ abszcisszájú pontjaiban az érintő és normális egyenletet.

$\boxed{\textbf{3.179}}$ Keressük meg az $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ görbe azon pontjait, ahol

a.) az érintő párhuzamos az x tengellyel

b.) az érintő az x tengely pozitív irányával $+45°$-os szöget zár be.

3.1.7. Szélsőérték számítás

$\boxed{\textbf{3.180}}$ Határozzuk meg az $y = x^3 - 12x$ függvény lokális szélsőértékeit!

$\boxed{\textbf{3.181}}$ Határozzuk meg az $y = x^4 e^{-x^2}$ függvény lokális szélsőértékeit!

$\boxed{\textbf{3.182}}$ Keressük meg az $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ függvény

a) lokális szélsőértékeit,

b) abszolút szélsőértékeit a $[0; 2]$ és a $(0; 2)$ intervallumokon.

3.183 Keressük meg az $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ függvény

a.) lokális szélsőértékeit

b.) abszolút szélsőértékeit az $[\frac{1}{2}; 2]$ intervallumon.

3.184 Keressük meg az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény
a.) lokális szélsőértékeit
b.) abszolút szélsőértékeit az (0; 1] intervallumon.

$\boxed{\textbf{3.185}}$ Határozzuk meg az R sugarú körbe írt legnagyobb területű téglalapot.

3.186 Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú hengert.

$\boxed{\textbf{3.187}}$ Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúpot.

3.188 Határozzuk meg az egy literes, felül nyitott legkisebb felszínű hengert.

3.189 Egyenlő szélességű három deszkából csatornát készítünk. Az oldalfalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete maximális?

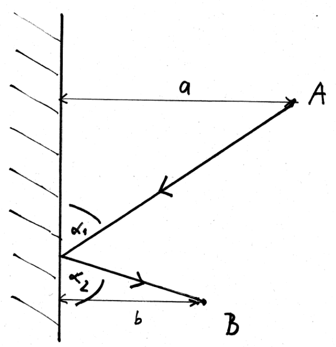
3.190 Határozzuk meg a h alkotójú kúpot közül azt, melynek a térfogata legnagyobb.

3.191 Egy a szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy b szélességű csatorna. A csatornák falai egyenes vonalúak. Határozzuk meg azon gerenda legnagyobb hosszát, amely az egyik csatornából átcsúsztatható a másikba.

3.192 Keressük meg az $y^2 = 8x$ parabolának azt a pontját, amely a $(6, 0)$ ponttól a legkisebb távolságra van.

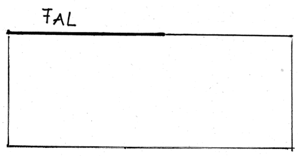
$\boxed{\textbf{3.193}}$ Feltsszük, hogy a gőzhajó energiafogyasztása a sebesség harmadik hatványával egyenesen arányos. Keressük meg a leggazdaságosabb óránkénti sebességet abban az esetben, ha a hajó c km/óra sebességű víz-sodrással szemben halad.

3.194 Az A és B pontok a ill. b távolságra vannak a faltól. Melyik a legrövidebb út A-ból B-be a falat érintve?



3.1. ábra.

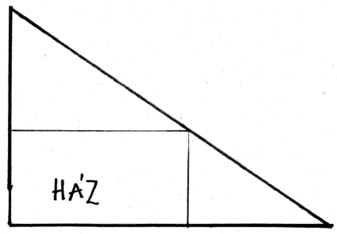
3.195 200 m hosszú drótkerítéssel szeretnénk maximális területet közrezárni, miközben csatlakozunk egy már meglevő 100 m hósszú kőfalhoz. Mekkorák lesznek a kert oldalai?



3.2. ábra.

$\boxed{\textbf{3.196}}$ Keressük meg a $4x^2 + 9y^2 = 36$ ellipszisnek azt a pontját, ami a $P(1, 0)$ ponthoz legközelebb illetve legtávolabb van.

3.197 Egy derékszögű háromszög alakú telek egymásra merőleges oldalai 100 m és 200 m. Az ábra szerint ráépített téglalap alapú ház alapterülete mikor lesz maximális?



3.3. ábra. 3.197. feladat.

3.198 Egy r sugarú félkörbe írható téglalapok közül melyik területe maximális? Melyik területe minimális?

$\boxed{\textbf{3.199}}$ Egy fapados repülőgépen 300 ülőhely van. Csak akkor indítják a járatot, ha legalább 200 ülőhely foglalt. Ha 200 utas van, akkor egy jegy ára 30e Ft, és minden egyes plusz utas esetén a jegyárak egységesen csökkennek 100 Ft-tal. Hány utas esetén lesz a légitársaság bevétele maximális illetve minimális?

3.200 Adott T területű téglalapok küzül melyik kerülete a minimális?

3.201 Egy x hosszú drótból levágunk egy darabot, négyzetet csinálunk belőle. A maradékot kör alakúra hajlítjuk. Mikor lesz a két alakzat össz-területe maximális?

3.1.8. Függvényvizsgálat

$\boxed{\textbf{3.202}}$ Vizsgáljuk és ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt!

Vizsgáljuk az alábbi függvényeket.

3.203 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

$\boxed{\textbf{3.204}}$ $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

$\boxed{\textbf{3.205}}$ $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

$\boxed{\textbf{3.206}}$ $f(x) = e^{-x^2}$

3.207 $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

$\boxed{\textbf{3.208}}$ $f(x) = e^x \cos(x)$

3.2. Megoldások. Valós függvények

3.2.1. Bevezető feladatok

3.1 x

3.2 $\sqrt{1-x^2}$

3.3 $\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

3.4 $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

3.5 $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}$

3.6 $\sin(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \qquad \sin(\operatorname{arc\,tg} 2.4) = \dfrac{12}{13}$

3.7 $\operatorname{sh}(2) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{2} = 3.627$

3.8 $\operatorname{ch}(3) = 10.068$

3.9 $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x = 3$, ha $\operatorname{sh} x = 1$.

3.10 $\operatorname{ar\,sh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, ezért $\operatorname{ar\,sh} 4 = \ln(4+\sqrt{17}) = 2.094$

3.11 $\operatorname{ar\,ch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 11})$, ezért

$$\begin{aligned}\operatorname{ar\,ch} 5 = \ln(5 \pm \sqrt{24}) &= \ln 9.8999 = 2.292 \\ &= \ln 0.101 = -2.292\end{aligned}$$

3.12 $\operatorname{ar\,th} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, ezért $\operatorname{ar\,th}(-0.6) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{0.4}{1.6} = -0.693.$

3.13 A $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ kifejezés azokra az x értékekre van értelmezve, melyek esetén a négyzetgyökjel alatti kifejezések nem negatívak, azaz, ha $1+x \geq 0$ és $1-x \geq 0$. Ezt az egyenlőtlenség rendszert megoldva kapjuk, hogy az értelmezési tartomány: $-1 \leq x \leq 1$.

3.14 $x \leq \dfrac{3}{2}$

3.15 $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3.16 $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$

3.17 A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Ezért függvényünk pontosan az $x^2 - 3x + 2 > 0$ feltételnek eleget tevő valós számokra van értelmezve. Az egyenlőtlenséget megoldva azt nyerjük, hogy az értelmezési tartomány: $x \in \mathbb{R} \setminus [1,2]$

3.18 A logaritmus mögött pozitív számnak kell állnia, ezért $\dfrac{5x - x^2}{4} > 0$. Továbbá a gyökjel alatti számnak nem- negatívnak kell lennie, ezért $\ln\left(\dfrac{5x - x^2}{4}\right) \geq 0$. E két feltétel együttese pontosan akkor teljesül, ha $\dfrac{5x - x^2}{4} \geq 1$. Ezért: $1 \leq x \leq 4$.

3.19 $-1 \leq x \leq 4$.

3.20 $-3 \leq x \leq -\sqrt{8}, \quad \sqrt{8} \leq x \leq 3$.

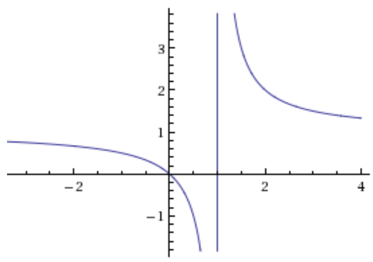
3.21 $-\infty < x < -3, \quad 2 < x < 5, \quad 8 < x < \infty$.

3.22 $1 < x < \infty$.

3.23 - 3.37

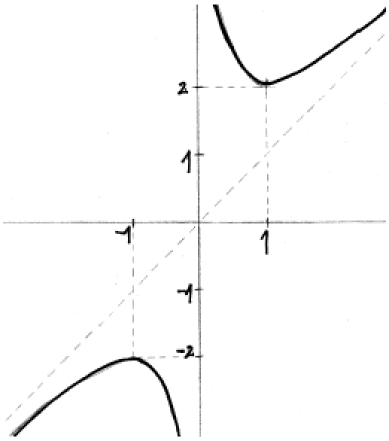
Racionális törtfüggvényeknél az ábrázolás előtt határozzuk meg, hogy hol lesznek a görbének a koordináta tengelyekkel párhuzamos aszimptotái.

Ahol egy törtfüggvénynek a nevezője zérus, ott pólusa van. Itt függőleges aszimptotája van. A vízszintes aszimptota helyét a függvény végtelenben vett határértéke határozza meg.

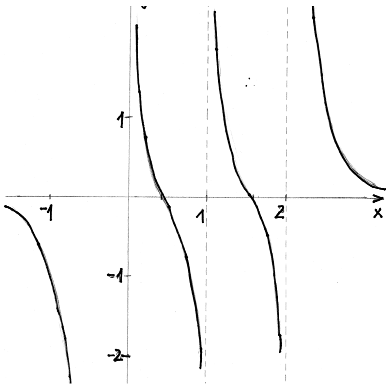


(a) 3.23. feladat

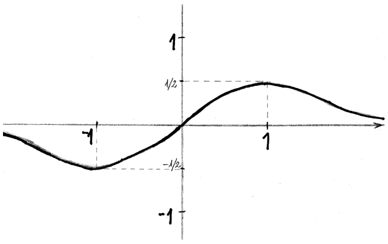
(b) 3.24. feladat



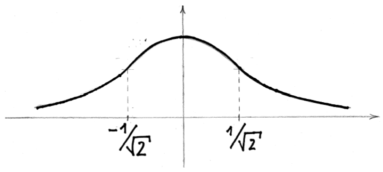
(c) 3.25. feladat



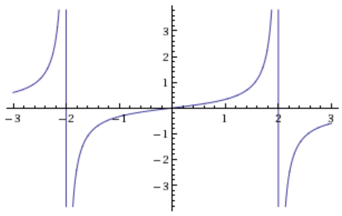
(d) 3.28. feladat



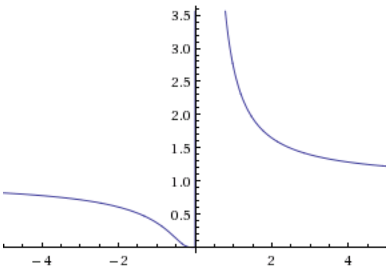
(e) 3.26. feladat



(f) 3.31. feladat

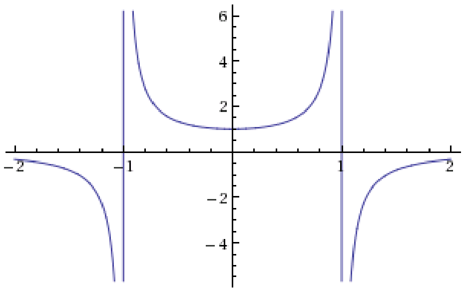


(g) 3.29. feladat

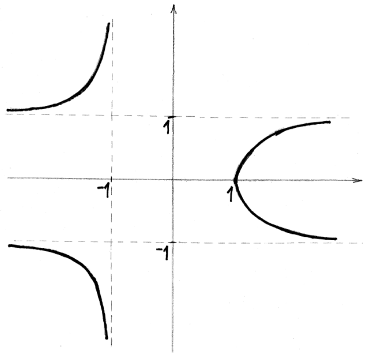


(h) 3.32. feladat

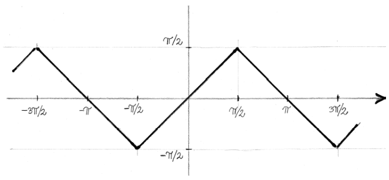
3.38 $\quad y = \dfrac{1-x}{2}.$



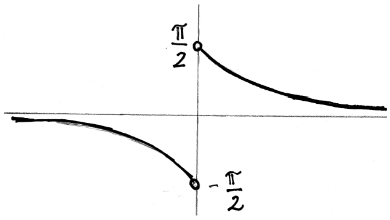
(i) 3.27. feladat



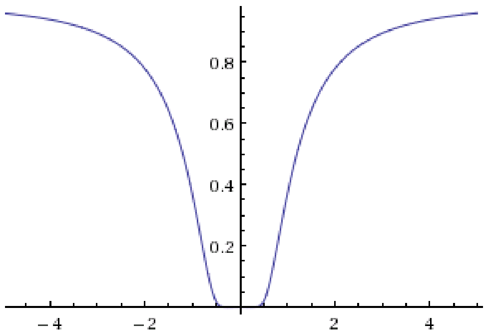
(j) 3.30. feladat



(k) 3.34. feladat



(l) 3.37. feladat



(m) 3.33. feladat

3.39 $y = x - 1$.

3.40 $y = \sqrt{x-1}$.

3.41 $y = \dfrac{x-1}{x}$.

3.42 $y = \sqrt{x^3-1}$.

3.43 $y = \sqrt{x^2+16}$.

3.44 $y = 3 - x^2$.

3.45 $y = \dfrac{3-x}{x-2}$.

3.46 $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3.47 $y = -\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

3.2.2. Határérték

3.48 3.

3.49 $+\infty$ ha k páros,
balról $-\infty$, jobbról $+\infty$ ha k páratlan.

3.50 0.

3.51 3.

3.52 ∞.

3.53 Az $(x-2)$ gyöktényezőt a számlálóból és a nevezőből is kiemeljük, majd egyszerűsítünk:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

3.54 $\dfrac{3}{2}$.

3.55 $\dfrac{2}{3}$.

3.56 6.

3.57 0.

3.58 n.

3.59 -1.

3.60 ∞.

3.61 Helyettesítsük $\sqrt[3]{1+x}$-et u-val. Ekkor $\sqrt[3]{1+x} = u$ és $x = u^3 - 1$.

Ha $x \to 0$, akkor $u \to 1$, tehát

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{u^3-1} = \lim_{u\to 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} = \lim_{u\to 1} \frac{1}{u^2+u+1} = \frac{1}{3}.$$

3.62 $x = u^{15}$ helyettesítés alkalmazásával

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} = \lim_{u\to -1} \frac{1+u^5}{1+u^3} = \lim_{u\to -1} \frac{u^4-u^3+u^2-u+1}{u^2-u+1} = \frac{5}{3}.$$

3.63 $\dfrac{1}{n}$.

3.64 1.

3.65 Mivel $x \to \infty$, ezért a nevező domináns tagjával, azaz $x^{\frac{7}{10}}$-nel egyszerűsítjük a törtet:

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[10]{x^7}+1963-\sqrt{x}} = \frac{(x^2-6)^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{7}{10}}+1963-x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{(x^2-6)^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{7}{10}}}+x^{\frac{1}{3}-\frac{7}{10}}}{1+\frac{1963}{x^{\frac{7}{10}}}-x^{\frac{1}{2}-\frac{7}{10}}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{x^2-6}{x^{2,1}}\right)^{\frac{10}{30}}+x^{-\frac{11}{30}}}{1+1963\cdot x^{-\frac{7}{10}}-x^{-\frac{1}{5}}} = \frac{\left(\frac{1}{x^{0,1}}-\frac{1}{x^{2,1}}\right)^{\frac{10}{30}}+x^{-\frac{11}{30}}}{1+1963\cdot x^{-\frac{7}{10}}-x^{-\frac{1}{5}}} \xrightarrow{(x\to\infty)} 0$$

3.66 A számlálót és a nevezőt egyaránt szorozva $\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)$-el, a kifejezés értéke nem változik. Viszont a számlálóból eltűnik a négyzetgyök jel, és ezt követően a kifejezés egyszerűsíthető x-el. Így az ismert $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ összefüggést használtuk ki.

Négyzetgyökös kifejezések esetén hasonlóan szoktunk eljárni máskor is.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1} = \frac{1}{2}.$$

3.67 $\dfrac{1}{2}$.

3.68

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x^2+\sqrt{x}}=3.$$

Ebben a példában ugyanaz a kifejezés volt a négyzetgyökjel alatt mind a két helyen, tehát az előzőekben említett példa módjára úgy is eljárhattunk volna, hogy $x=u^2$ helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Az itt bemutatott módszer azonban általánosabb esetben is alkalmazható.

3.69

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1-x^2)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})\cdot(1+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1\cdot 2}{2}=1.$$

3.70 $0.$

3.71 $0.$

3.72 $\frac{1}{2}.$

3.73 $4.$

3.74 Alkalmazzuk az $u=\sqrt[3]{x^2+1}\to 1$ helyettesítést. Ekkor $x^2=u^3-1$, s ezzel

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)\cdot(u^2+u+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2+u+1}=\frac{1}{3}.$$

3.75 $\frac{1}{2}.$

3.76 $\frac{5}{\sqrt{2}}.$

3.77 $\frac{1}{4}.$

3.78 $\frac{3}{2}.$

3.79 $\frac{5}{3}.$

3.80 $5.$

3.81

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{mx}\right)\cdot\frac{mx}{nx}=1\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}.$$

3.82

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\cdot\frac{\sin ax}{ax}}{bx\cdot\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}.$$

3.83

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\lim_{x\to 0}(\cos(x))\cdot\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}=1\cdot\frac{2}{1}=2.$$

3.84 1.

3.85

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}.$$

3.86 $\frac{1}{2}$.

3.87

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x\cdot\frac{x}{\sin(x)}=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=0.$$

3.88 $\frac{1}{2}$.

3.89 -1.

3.90

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x^3)}}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{(1-\cos(x))\cdot(1+\sqrt{\cos(x^3)})}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos(x^3)}{(x^3)^2}}{\frac{1-\cos(x)}{x^2}}\cdot x^4\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos(x^3)}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

3.91 $\frac{1}{2}$

3.92 -3

3.93

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2x}{x+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2}{1+\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\frac{1-1\cdot 2}{1+1\cdot 3}=-\frac{1}{4}.$$

3.94 ∞

3.95

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-2\sin(x)\cos(x)}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1.$$

3.96 2

3.97

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}}=1.$$

3.98 1

3.2.3. Függvény deriválás

3.99 $f'(x)=12x^2-2x.$

3.100 $f'(x)=3x^2\cdot\sin(x)+(x^3-3)\cdot\cos(x).$

3.101 $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2+x+1)\cos(x)-(x^3+3)[(2x+1)\cos(x)-(x^2+x+1)\sin(x)]}{(x^2+x+1)^2\cos^2(x)}.$

3.102 $f(x)=\sin(x)\cdot\sin(x)$ tehát

$$f'(x)=\cos(x)\cdot\sin(x)+\sin(x)\cdot\cos(x)=2\sin(x)\cos(x)=\sin(2x).$$

3.103 $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$

3.104 $f'(x) = (2x - 5)\cos(x^2 - 5x + 8).$

3.105 $f'(x) = 6(x^4 - 6x + 1)^5 \cdot (4x^3 - 6)\mathrm{tg}\,\frac{1}{x} - \frac{(x^4 - 6x + 1)^6}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$

3.106 $f'(x) = \frac{-4x^3 \sin(x^4) \cdot (2 + \sin^3 x) - 3\cos(x^4)\sin^2(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin^3(x))^2}.$

3.107 $f'(x) = \frac{2\mathrm{tg}\,(x^2)}{\cos^2(x^2)} \cdot 2x = \frac{4x\mathrm{tg}\,(x^2)}{\cos^2(x^2)}.$

3.108 $f'(x) = 3\sin^2(\frac{1 + x^2}{\mathrm{tg}\,2x}) \cdot \cos(\frac{1 + x^2}{\mathrm{tg}\,2x}) \cdot \frac{2(x\mathrm{tg}\,2x - \frac{1+x^2}{\cos^2 2x})}{\mathrm{tg}\,^2 2x}.$

3.109 $f'(x) = 10^{\sin(x^3)} \cdot \ln 10 \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3(\ln 10)x^2 \cdot 10^{\sin(x^3)} \cdot \cos(x^3).$

3.110 $f'(x) = -2xe^{-x^2}.$

3.111 $f'(x) = \pi^{\sin(x)} \ln \pi \cdot \cos(x).$

3.112 $f(x) = x^{\frac{7}{8}}$ tehát $f'(x) = \frac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}.$

3.113 $f'(x) = \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}.$

3.114 $f'(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}.$

3.115 $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2 - 1}{1 + \mathrm{tg}\,3x}} \cdot \frac{\frac{3}{\cos^2 3x} \cdot (x^2 - 1) - 2x(1 + \mathrm{tg}\,3x)}{(x^2 - 1)^2}.$

3.116

$$f'(x) = \frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{2\sqrt{\lg(1 + \sin^2 2x)} \cdot \ln(10)} \cdot (1 + \sin^2 2x) =$$

$$= \frac{\sin 4x}{\sqrt{\lg(1 + \sin^2 2x)} \cdot \ln(10)} \cdot (1 + \sin^2 2x).$$

3.117 $f'(x) = \mathrm{ch}[x^3 - \ln(x + 7)] \cdot (3x^2 - \frac{1}{x + 7}).$

3.118 $f'(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}$.

3.119 $f'(x) = \dfrac{5 \cdot 2^{5 \arcsin x} \cdot \ln 2}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.120 $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.121 $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{x+1})^2 - 1}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x}}$.

3.122 Mivel $\operatorname{ar\,th}(x) = \dfrac{1}{2} \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x} \right)$, ezért

$$e^{\operatorname{ar\,th} x^2} = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}} = e^{\ln \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)^3}}$$

3.123 $f'(x) = \dfrac{1}{11} \dfrac{1}{(\sqrt[11]{2 - \sqrt[3]{x}})^{10}} \left(-\dfrac{1}{3} \right) \dfrac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}$.

3.124 Deriváljuk mindkét oldalt: $2x + 2yy' = 0$, innen: $y' = -\dfrac{x}{y}$.

3.125 Deriváljuk mindkét oldalt:

$$\frac{\cos(x)\ \cos(y) + y' \sin(x)\ \sin(y)}{\cos^2(y)} + \frac{y' \cos(x)\ \cos(y) + \sin(x)\ \sin(y)}{\cos^2(x)} = 0.$$

Innen:

$$y' = -\frac{\dfrac{\cos(x)}{\cos(y)} + \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(y)} + \dfrac{\cos(x)\cos(y)}{\cos^2(x)}}.$$

3.126 Deriváljuk mindkét oldalt:

$$3x^2 + 3y^2 y' - (3ay + 3axy') = 0.$$

Innen átrendezéssel: $y' = \dfrac{a \cdot y - x^2}{y^2 - ax}$.

3.127 $y' = \dfrac{\cos y}{2 \sin 2y + (x-1) \sin y}$

3.128 Vegyük mindkét oldal logaritmusát: $x \ln f(x) = f(x) \ln x$.

Deriváljuk mindkét oldalt: $\ln f(x) + \frac{x}{f(x)} f'(x) = f'(x) \ln x + \frac{f(x)}{x}$.

Innen azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{f(x)^2 - x f(x) \ln f(x)}{x^2 - x f(x) \ln x}.$$

3.129 $\quad f'(x) = 1 + \frac{1}{f(x)^2}$.

3.130 Mindkét oldalnak a logaritmusát vesszük: $\ln f(x) = (1-x)\ln(1+x)$. Aztán – mint implicit függvényt – deriváljuk:

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = -\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x}.$$

Innen átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (1+x)^{1-x} \cdot (\frac{1-x}{1+x} - \ln(1+x)).$$

3.2.4. Taylor polinomok

3.131 A Taylor polinom képlete szerint:

$$T_4(x) = f(e) + \frac{f'(e)}{1!}(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2 + \frac{f'''(e)}{3!}(x-e)^3 + \frac{f^{(4)}(e)}{4!}(x-e)^4.$$

A fenti képletbeli számítások: $f(e) = \ln e = 1$. A derivált

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(e) = \frac{1}{e}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(e) = -\frac{1}{e^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(e) = \frac{2}{e^3},$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \qquad f^{(4)}(e) = -\frac{6}{e^4}.$$

Így a keresett polinom:

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-e)^4.$$

3.132

$$T_4(x) = e^2[1 + \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \frac{1}{4!}(x-2)^4].$$

3.133

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{16}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3.$$

3.134 $f(x) = \sin(x), \qquad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$f'(x) = \cos(x), \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f''(x) = -\sin(x), \qquad f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f'''(x) = -\cos(x), \qquad f'''(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3\right]$$

3.135

$$2 \cdot T_4(x) = \sin(3) + \frac{3\cos(3)}{1!}(x-1) - \frac{3^2\sin(3)}{2!}(x-1)^2 -$$

$$\frac{3^3\cos(3)}{3!}(x-1)^3 + \frac{3^4\sin(3)}{4!}(x-1)^4.$$

3.136 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5, \qquad f(2) = 1.$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11, \qquad f'(2) = -1$

$f''(x) = 6x - 12, \qquad f''(2) = 0$

$f'''(x) = 6, \qquad f'''(2) = 6\,.$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 =$$

$$= 1 - \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = (x-2)^3 - (x-2) + 1.$$

Megjegyzés: Mivel az n-ed fokú polinom megegyezik bármely helyen felírt n-edfokú Taylor polinomjával, ezért

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1\,.$$

Természetesen ez az azonosság elemi úton is ellenőrizhető.

3.137

$$\begin{aligned} T(x) &= 7 + 29(x-1) + 76(x-1)^2 + 110(x-1)^3 + 90(x-1)^4 + \\ &+ 39(x-1)^5 + 7(x-1)^6. \end{aligned}$$

3.138 $T_5(x) = 6 + 5(x-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5.$

3.139 $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4.$

3.140 $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 3x, \qquad f(0) = 0.$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}\cos 3x, \qquad f'(0) = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -\dfrac{3^2}{2}\sin 3x, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\dfrac{3^3}{2}\cos 3x, \qquad f'''(0) = -\dfrac{3^3}{2}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{3^4}{2}\sin 3x, \qquad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{3^5}{2}\cos 3x, \qquad f^{(5)}(0) = \dfrac{3^5}{2}$

$f^{(6)}(x) = -\dfrac{3^6}{2}\sin 3x, \qquad f^{(6)}(0) = 0.$

Tehát a keresett polinom:

$$\begin{aligned} T_6(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 = \\ &= 0 + \frac{\frac{3}{2}}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-\frac{3^3}{2}}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{\frac{3^5}{2}}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 = \\ &= \frac{1}{2}[3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5]. \end{aligned}$$

3.141 $T_5(x) = T_4(x) = 1 - 2x^2 + \dfrac{2}{3}x^4.$

3.142 $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\dfrac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \dfrac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \qquad f'''(0) = -2.$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}.$$

3.143

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

3.144

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ &+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k. \end{aligned}$$

3.145 A felírt polinom hatod fokúnak is tekinthető, ezért az elkövetett hiba

$$|R_6(x)| = \left|\frac{f^7(\xi)}{7!}x^7\right| = \frac{|-\cos(\xi)|x|^7|}{5040} < \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} < 5 \cdot 10^{-3},$$

mert $|-\cos(\xi)| \leq 1$ bármilyen ξ esetén, és a $0 \leq x \leq 1$ feltevés miatt $|x| \leq 1$. Ha tehát a 0-tól 1 radiánig ($\approx 57,3^\circ$) terjedő szögek sinusát az előbbi ötödfokú polinommal számítjuk ki, akkor a hiba 2 tízezrednél kisebb.

3.146 Az e szám két tizedes jegy pontossággal való megközelítése azt jelenti, hogy megkeressük a két tizedes jeggyel felírt tizedes törtek halmazából azt az elemet, amely az e számhoz legközelebb esik. Ez a halmaz: $\{k \cdot 0.01 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Mivel két ilyen szomszédos tizedes tört távolsága $0,01$, ezért célszerűnek tűnik, hogy az e számot először $\frac{1}{2} \cdot 0.01 = 5 \cdot 10^{-3}$ pontossággal közelítsük meg racionális számmal, majd ebből próbáljuk meg kikövetkeztetni, hogy az említett "százados" skálán melyik elem esik hozzá legközelebb.

Az e számot az $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ függvény $x = 1$ helyen vett helyettesítési értéke adja. Ezért a feladat most olyan $n \in \mathbb{N}$ keresése, melyre

$$|e - T_n(1)| = |f(1) - T_n(1)| < 5 \cdot 10^{-3}\,.$$

A Taylor-formulát $x = 1$ esetén alkalmazva kapjuk, hogy van olyan $0 < \xi < 1$ szám, melyre

$$f(1) - T_n(1) = f(1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^\xi}{(n+1)!} > 0\,.$$

A $\xi < 1$, $e < 3$ becsléseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 < f(1) - T_n(1) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}\,, \tag{3.1}$$

ezért elég megoldani a

$$\frac{3}{(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-3}$$

egyenlőtlenséget. Ez az egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$(n+1)! > 600\,,$$

amiből kiolvasható, hogy $n \geq 5$. Nézzük tehát pl. az $n = 5$ esetet:

$$T_5(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{8,15}{3} = 2,716666\ldots$$

Rendezzük át az (3.1) becslést:

$$T_n(1) < f(1) < T_n(1) + \frac{3}{(n+1)!}\,,$$

majd alkalmazzuk $n = 5$-re:

$$2,716666\cdots < e < 2,716666\cdots + \frac{3}{6!} = 2,72083333\ldots$$

Ebből már látható, hogy a "százados" skálán az e számhoz a $2,72$ tizedes tört esik legközelebb, tehát az e szám két tizedes jeggyel felírt közelítő értéke: $2,72$.

3.2.5. Határérték meghatározása L'Hospital szabállyal

3.147

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ \cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{5}\ \cos 3x\ \cos^2 5x = \frac{3}{5}.$$

3.148 $\frac{1}{2}$.

3.149 $-\frac{1}{2}$.

3.150 1.

3.151

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}=2.$$

3.152 2.

3.153 1.

3.154 0.

3.155 $e-1$.

3.156

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\ \cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\cos(x)\ \ -x\sin(x)}=1.$$

3.157 0.

3.158

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{a}{x^2}\right)\cdot\cos\frac{a}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}a\cdot\cos\frac{a}{x}=a\cdot\cos 0=a$$

3.159 1.

3.160 $-\frac{1}{3}$.

3.161 0.

3.162

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\operatorname{tg}(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{(\operatorname{tg}(x))\cdot(\ln\sin(x))}=e^0=1.$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}(x))\cdot(\ln\sin(x))=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin(x)}{\operatorname{ctg}x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{\sin^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin(x)\cos(x))=0\,.$$

3.163 1.

3.164 1.

3.165 1.

3.166 e^2.

3.167 $\frac{1}{e}$.

3.168 ∞.

3.169 ∞.

3.170 1.

3.171 e.

3.2.6. Síkgörbe érintője

3.172 Az érintő egyenlete $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.

Példánkban $x_0 = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.

Az érintő egyenlete $y = (x-1) + 2$ azaz $y = x + 1$.

3.173 Az érintő egyenlete $y = \frac{1}{e}x$ Az x tengelyt ott metszi, ahol $y = 0$. Ebből $x = 0$.

Az érintő az origón megy keresztül.

3.174 Az érintő iránytangense y' megegyezik az egyenes meredekségével. $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 2$.

Innen $\cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Tehát a keresett pontok: $P_k(\frac{\pi}{4} + k\pi;\ 1)$, $\quad Q_k(-\frac{\pi}{4} + k\pi;\ -1) \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3.175 $P_1(-2, 1530)$; $P_2(2, 1522)$.

3.176 $T_\triangle = 2a$.

3.177 A normális meredeksége $m = -\frac{1}{y'(\frac{\pi}{4})} = -\cos^2\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$. Innen az érintő egyenlete:

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}.$$

3.178 Keressük meg először a jelzett pontokat. Az $x = 1$ értéket beírjuk a függvénybe: $y^3 - 3 - 4y + 3 = 0$. Innen $y(y^2 - 4) = 0$.

Három értéket találunk: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = -2$, ezért a megfelelő pontok

$$P_1(1, 0),\ P_2(1, 2),\ P_3(1, -2).$$

A derivált

$$y' = -\frac{-6x-4y}{3y^2-4x} = \frac{6x+4y}{3y^2-4x}, \qquad y'(P_1) = -\frac{3}{2}, \quad y'(P_2) = \frac{7}{4}, \quad y'(P_3) = -\frac{1}{4}.$$

Érintő egyenesek:

$$y = -\frac{3}{2}(x-1), \quad y-2 = \frac{7}{4}(x-1), \quad y+2 = -\frac{1}{4}(x-1).$$

Normális egyenesek:

$$y = \frac{2}{3}(x-1), \quad y-2 = -\frac{4}{7}(x-1), \quad y+2 = 4(x-1).$$

3.179 $y' = x^2 - 2x$, ezt felhasználva:

a) $x^2-2x=0$, amiből $x=0$ vagy $x=2$. A keresett pontok: $P_1(0,\,1)$, $P_2(2,\,-\frac{1}{3})$.

b) $+45°$-os bezárt szög esetén az érintő meredeksége 1,
ezért megoldandó az $x^2-2x=1$ egyenlet. Ennek gyökei $x_1 = 1+\sqrt{2}$, $x_2 = 1-\sqrt{2}$.
Tehát a keresett pontok: $Q_1(1+\sqrt{2},\, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3})$, $Q_2(1-\sqrt{2},\, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3})$.

3.2.7. Szélsőérték számítás

3.180 A függvénynek lokális szélsőértéke ott lehet, ahol az első derivált zérus. Ha ezen a helyen az első el nem tűnő derivált páros rendű, akkor van lokális szélsőérték. Ha ez a derivált az adott pontban pozitív, akkor lokális minimum van, ha negatív, akkor lokális maximum van.

$y = x^3 - 12x$, ezért $y' = 3x^2 - 12$ és $y'' = 6x$.

$y' = 0$ ha $x^2 = 4$, azaz $x = \pm 2$

$y''(2) = 12 > 0$, lokális minimum van $y(2) = -16$.

$y''(-2) = -12 < 0$, lokális maximum van $y(-2) = 16$.

3.181 $y' = (4x^3 - 2x^5)e^{-x^2} = x^3(4-2x^2)e^{-x^2}$
Mivel e^{-x^2} mindenütt pozitív, $y' = 0$ akkor lehet, ha $x_1 = 0$ ill. $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$
$y'' = (12x^2 - 18x^4 + 4x^6)e^{-x^2}$
$y''(0) = 0$, tehát ezt a helyet tovább kell vizsgálni.
$y''(\sqrt{2}) = y''(-\sqrt{2}) = -\frac{16}{e^2} < 0$, tehát ezeken a helyeken a függvénynek lokális maximuma van.

Vizsgáljuk az $x = 0$ helyet.
$y''' = (24x - 96x^3 + 60x^5 - 8x^7)e^{-x^2}$; $y'''(0) = 0$
$y^{(\mathrm{IV})} = (24 - 336x^2 + 492x^4 - 176x^6 + 16x^8)e^{-x^2}$
$y^{(\mathrm{IV})}(0) = 24 > 0$, tehát a függvénynek az $x = 0$ helyen van lokális szélsőértéke: lokális minimuma van.
$x_1 = 0$-nál $y_{min} = 0$
$x_2 = \sqrt{2}$ és $x_3 = -\sqrt{2}$-nél $y_{max} = \dfrac{4}{e^2}$.

*M*egjegyzés: természetesen kereshetjük a lokális szélsőérték helyeket a függvény monotonitásának vizsgálatával is.

3.182 a) f monotonitását vizsgáljuk, s ebből következtetünk a keresett szélsőérték helyekre. A derivált $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$, melynek zérushelyei: $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. Ennek alapján a függvény monotonitása:

- a $(-\infty, 1]$ intervallumon: szigorúan nő,
- a $[1, 5]$ intervallumon szigorúan csökken,
- a $[5, +\infty]$ intervallumon. szigorúan nő.

Emiatt az $x = 1$ helyen lokális maximuma van, melynek értéke: 4, és az $x = 5$ helyen lokális minimuma van, melynek értéke: -28.

b) A $[0, 2]$ intervallumon vegyük figyelembe, hogy f a $[0, 1]$ intervallumon szigorúan nő, az $[1, 2]$ intervallumon pedig szigorúan csökken. Emiatt abszolút maximuma az $x = 1$ helyen felvett $f(1) = 4$, abszolút minimuma pedig $\min\{f(0); f(2)\} = f(0) = -3$.

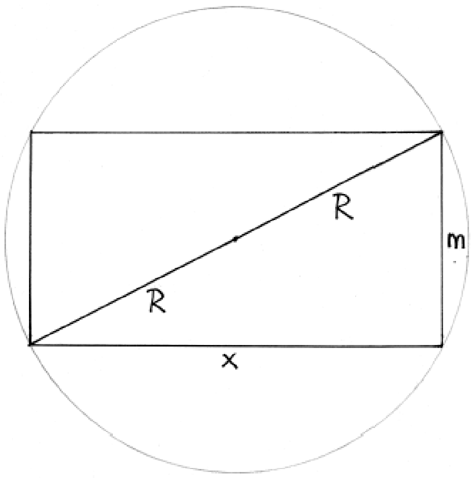
A $(0, 2)$ nyílt intervallumon - a monotonitás alapján - az $x = 1$ helyen van abszolút maximum, abszolút minimum pedig nincs.

3.183 Lokális szélsőértékek: $f(x)_{max} = -2$, ha $x = -1$ és $f(x)_{min} = 2$, ha $x = 1$.

Abszolút szélsőértékek $[\frac{1}{2}; 2]$-n: abszolút minimum $x = 1$-nél 2, abszolút maximum $x = \frac{1}{2}$-nél és $x = 2$-nél $\frac{5}{2}$.

3.184 Lokális szélsőérték: $f(x)_{min} = -\dfrac{1}{2e}$, ha $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Abszolút szélsőérték $(0; 1]$-en: abszolút minimum $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$-nél $-\dfrac{1}{2e}$, abszolút maximum $x = 1$-nél 0.



3.4. ábra. 3.185 feladat

3.185 Jelöljük a négyszög alapját x-el, magasságát m-el, akkor a terület $T = x \cdot m$. Ekkor $x^2 + m^2 = 4R^2$, ahonnan $m = \sqrt{4R^2 - x^2}$.Így $T = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$.

A kapott függvény maximumát kell keresnünk. Egyszerűsítést jelenthet, ha a terület-függvény helyett annak négyzetét tekintjük. T^2-nek ugyanott van maximuma, ahol T-nek:

$$T^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

A maximális területű négyszög négyzet, és $x = m = \sqrt{2}R$. $T = 2R^2$.

3.186 Legyen a henger sugara r, magassága m.

$V = r^2\pi m$

$V_{max} = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}R^3\pi$, ha $r = R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $m = \dfrac{2}{\sqrt{3}}R$.

3.187 Legyen a kúp alapkörének a sugara r, magassága m. Vezessük be az ábrán jelzett x-et.

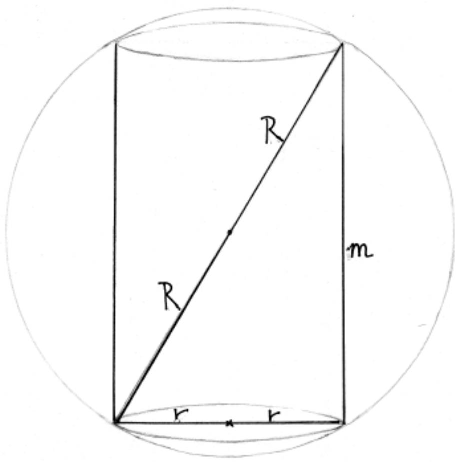
Ezzel a kúp sugara és magassága is kifejezhető.

$V = \dfrac{r^2\pi m}{3}$; $r^2 = R^2 - x^2$, $m = R + x$.

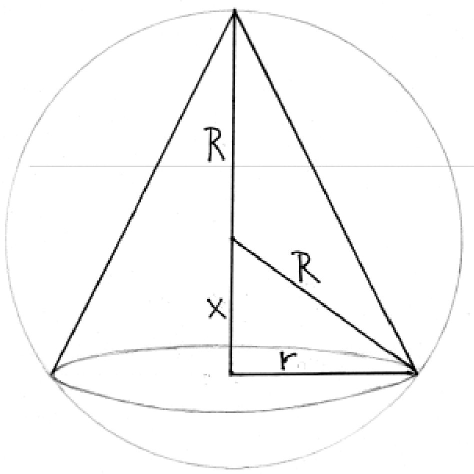
$V = \dfrac{\pi}{3}(R^2 - x^2)(R + x)$

$V_{max} = \dfrac{32}{81}R^3\pi$, ha $m = \dfrac{4}{3}R$, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$.

3.188 $r = m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$



3.5. ábra. 3.186. feladat

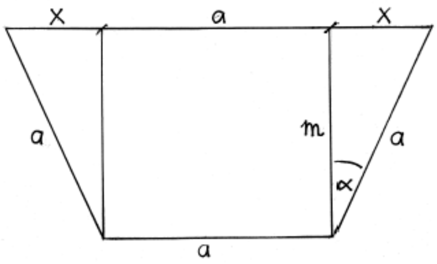


3.6. ábra. 3.187. feladat

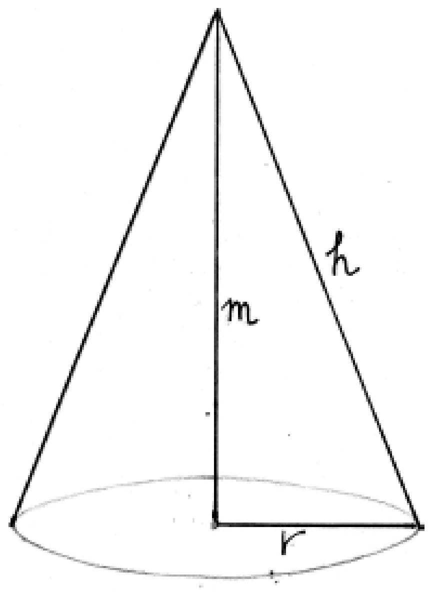
3.189 A feladat megoldásában segít az ábra: $T = \frac{2a+2x}{2}m = (a+x)m$
$\varphi = 60°$.

3.190 A feladat megoldásában segít az ábra: $V_{max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$, ha $r = \sqrt{\frac{2}{3}}h$, $m = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

3.191 A feladat megoldásában segít az ábra: $l_{max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, ha $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.



3.7. ábra. 3.189. feladat

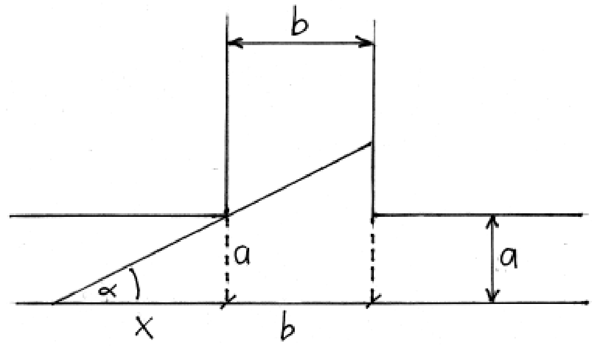


3.8. ábra. 3.190. feladat

3.192 $P(2, \pm 4)$.

3.193 Egy óra alatt a hajó $v - c$ km-nyi utat tesz meg felfelé. Ez alatt a fogyasztása $E = av^3$ (a konstans arányossági tényező). A D költséget az egy km megtételéhez felhasznált energiával mérhetjük. A hajózás akkor a leggazdaságosabb, ha egy km út felfelé való megtételéhez a legkevesebb energia szükséges.

A költség minimumát a $K = a\dfrac{v^3}{v-c}$ költségfüggvény minimuma adja. A leggaz-



3.9. ábra. 3.191. feladat

daságosabb sebesség: $v = \frac{3}{2} c \; km/h$.

3.194 Minimális távolság esetén $\alpha_1 = \alpha_2$.

3.195 Maximális terület 5000 m^2, ekkor $a = 100$ m, $b = 50$ m.

A minimális terület 0 (egyenes vonal).

3.196 Jelölje (x, y) az ellipszis egy pontját. Ekkor P és (x, y) távolsága:

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\,.$$

Ennek minimumát és maximumát keressük a $4x^2 + 9y^2 = 36$ feltétel mellett.

Nyilvánvaló, hogy d és d^2 szélsőérték-helyei ugyanott vannak, ezért d^2 szélsőérték-helyeit fogjuk keresni. A feltételi egyenletből kifejezzük y^2-et, majd behelyettesítjük d^2 képletébe:

$$d^2 = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + \frac{36 - 4x^2}{9} = \frac{5}{9}x^2 - 2x + 5$$

Keressük tehát az $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 2x + 5$ függvény abszolút szélsőértékeit a $[-3,\, 3]$ intervallumon. A $[-3,\, 3]$ intervallumhoz úgy jutunk el, hogy a feltételi egyenlet átrendezésével $9y^2 = 36 - 4x^2$, amiből $36 - 4x^2 \geq 0$, azaz $-3 \leq x \leq 3$ adódik. Weierstrass tétele alapján tudjuk, hogy a keresett szélsőértékek léteznek.

Keressük meg a derivált zérushelyét: $f'(x) = \frac{10}{9}x - 2 = 0$, ennek egyetlen megoldása $x = \frac{9}{5}$. Ez benne van a $[-3,\, 3]$ intervallumban. Így:

$$\min f = \min\left\{ f\left(\frac{9}{5}\right),\, f(-3),\, f(3) \right\} = \min\left\{ \frac{4}{\sqrt{5}},\, 4,\, 2 \right\} = \frac{4}{\sqrt{5}} = f\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$\max f = \max\left\{ f\left(\frac{9}{5}\right),\ f(-3),\ f(3) \right\} = \max\left\{ \frac{4}{\sqrt{5}},\ 4,\ 2 \right\} = 4 = f(-3)$$

Ennek alapján a P-hez legközelebbi pontok (2 ilyen van): $A_1(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ és $A_2(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$, a legtávolabbi pont pedig $B(-3, 0)$.

3.197 A ház oldalainak hossza 100 m és 50 m.

3.198 A maximális területű téglalap oldalai $\frac{r}{\sqrt{2}}$ és $\frac{2r}{\sqrt{2}}$. A minimális területű téglalap a degenerált eset: egyetlen vonal.

3.199 Legyen $f(x)$ a bevétel, ha x utas van. A 200 fölöttiek száma $x - 200$, ezért a jegyek ára ennyivel csökken, tehát darabonként $30.000 - 100 \cdot (x - 200)$. Ezért az összes jegy ára:

$$f(x) = x\Big(30.000 - 100(x - 200)\Big) = 50.000x - 100x^2$$

Az $f'(x) = 0$ egyenlet megoldása $x = 250$, így a potenciális szélsőérték helyek: $x = 200$, $x = 250$, $x = 350$. A megfelelő függvényértékek:

$$f(200) = 600.000, \qquad f(250) = 625.000, \qquad f(350) = 525.000$$

Maximális a bevétel 250 utas esetén, és minimális 350 utas esetén. (A feladat csupán elméleti...)

3.200 Négyzet.

3.201 Az egész drótból kört hajlítunk.

3.2.8. Függvényvizsgálat

A függvényvizsgálat során a fő kérdések az alábbiak:

1. értelmezési tartomány
2. zérushelyek
3. a függvény viselkedése az értelmezési tartomány határain (határértékek)
4. növekvő és csökkenő szakaszok, szélsőérték
5. konvex és konkáv szakaszok, inflexiós pontok
6. grafikon felvázolása, értékkészlet

3.202 *Értelmezési tartomány*: $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

A zérushelyeket az $x^2 \ln x = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk: $x = 1$.

Határértékek: $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$ (L'Hospital-lal), $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$.

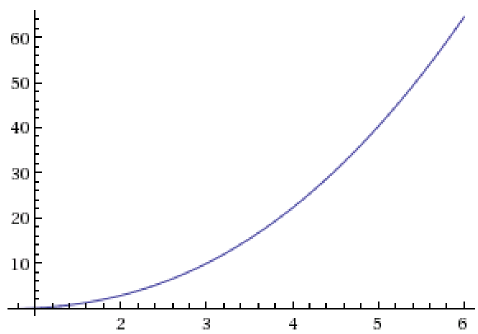
Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x \cdot (2 \ln x\ + 1)$. Ennek egyetlen zérushelye van: $x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk: f a $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ intervallumon csökken, az $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ intervallumon nő. Az $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ helyen abszolút minimuma van. A minimum értéke: $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \dfrac{2}{x} = 2 \ln x + 3$. Ennek egyetlen zérushelye van: $x = e^{-3/2} = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$.

f'' előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk: f a $\left[0, \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right]$ intervallumon konkáv, az $\left[\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty\right)$ intervallumon konvex. Az $x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ helyen inflexiós pontja van.

A függvény grafikonja:



3.10. ábra. 3.202 feladat

Értékkészlet: $R_f = \left[-\dfrac{1}{2e}, +\infty\right)$.

3.203 $f(-1)$: maximum, $f(4)$: minimum, $f\left(\frac{3}{2}\right)$: inflexió.

3.204 *Értelmezési tartomány*: $D_f = \mathbb{R}$, a függvény páratlan.

A *zérushelyek*et az $\frac{x}{1+x^2} = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk: $x = 0$.

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$.

Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Ennek zérushelyei: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

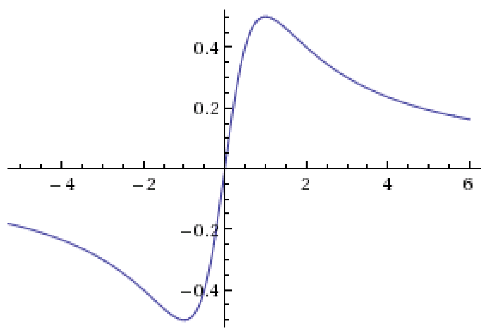
f a $(-\infty, -1]$ intervallumon csökken, a $[-1, 1]$ intervallumon nő, az $[1, +\infty)$ intervallumon csökken. Az $x = -1$ helyen lokális minimuma, az $x = 1$ helyen lokális maximuma van. A lokális minimum értéke $-\frac{1}{2}$, a lokális maximum értéke $\frac{1}{2}$.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = \frac{2x\cdot(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. Ennek három zérushelye van: $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

f'' előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

f a $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right]$ és a $\left[0, \sqrt{3}\right]$ intervallumokon konkáv, a $\left[-\sqrt{3}, 0\right]$ és a $\left[\sqrt{3}, +\infty\right)$ intervallumokon konvex. Az $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ helyeken inflexiós pontja van.

Aszimptota az x-tengely. A függvény grafikonja:



3.11. ábra. 3.204 feladat

Értékkészlet: $R_f = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Az $x_1 = -1$ helyen abszolút minimuma, az $x_2 = 1$ helyen abszolút maximuma van.

3.205 *Értelmezési tartomány*: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a függvény páratlan.

A zérushelyeket az $x + \dfrac{1}{x} = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk. Ennek az egyenletnek azonban nincs valós gyöke, tehát a függvénynek nincs zérushelye.

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0+} f(x) = +\infty$.

Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$. Ennek zérushelyei: $x_1 = -1, x_2 = 1$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

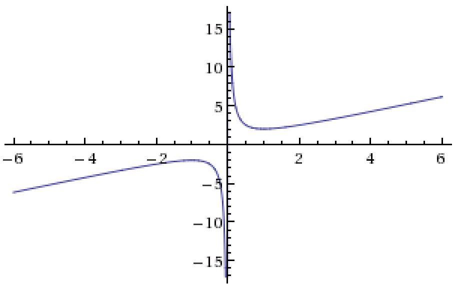
f a $(-\infty, -1]$ intervallumon nő, a $[-1, 0)$ intervallumon csökken, a $(0, 1]$ intervallumon csökken, az $[1, +\infty)$ intervallumon nő. Az $x = -1$ helyen lokális maximuma, az $x = 1$ helyen lokális minimuma van. A lokális maximum értéke -2, a lokális minimum értéke 2.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. Ennek nincs zérushelye.

f'' előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

f a $(-\infty, 0)$ intervallumon konkáv, a $(0, +\infty)$ intervallumon konvex. Inflexiós pontja nincs.

Aszimptota az $y = x$ egyenes. A függvény grafikonja:



3.12. ábra. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Értékkészlet: $R_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. Abszolút szélsőértékei nincsenek.

3.206 *Értelmezési tartomány*: $D_f = \mathbb{R}$, a függvény páros.

Zérushely nincs, mivel bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $e^{-x^2} > 0$.

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$.

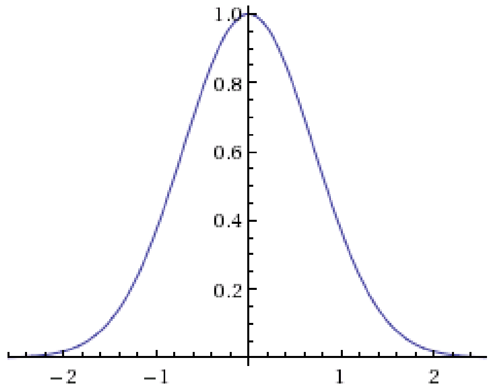
Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$. Ennek egyetlen zérushelye van: $x = 0$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk: f a $(-\infty,\, 0]$ intervallumon nő, a $[0,\, +\infty)$ intervallumon csökken. Az $x = 0$ helyen abszolút maximuma van. A maximum értéke: $f\,(0) = 1$.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$. Ennek két zérushelye van: $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

f'' előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:
f a $\left(-\infty,\, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ és az $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}},\, +\infty\right)$ intervallumokon konvex, a $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ intervallumon konkáv. Az $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ helyeken inflexiós pontja van.

A függvény grafikonja:



3.13. ábra. $f(x) = e^{-x^2}$

Értékkészlete a $(0,\, 1]$ intervallum.

3.207 D_f : $\{x \in R/\{-1\}\}$; $f(0) = 0$: minimum, $f(-2) = 4$: maximum, inflexió nincs, aszimptotája az $y = x - 1$ egyenes.

A $(-\infty,\ -2)$ és $(0,\ +\infty)$ szakaszokon növekvő, $(-2,\ -1)$ és $(-1,\ 0)$ szakaszokon csökkenő.

$R_f : \{0 < f(x) \leq\ -4,\ f(x) \geq 0\}$

3.208 *Értelmezési tartomány*: $D_f = \mathbb{R}$.

Zérushelyek: az $e^x \cdot \cos(x) = 0$ egyenlet megoldásával kapjuk, hogy

$$x = z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kapcsolat az exponenciális függvénnyel: az $e^x \cdot \cos(x) = e^x$ egyenlet megoldásával kapjuk, hogy $\cos(x) = 1$, azaz $x = x_k = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. Könnyű kiszámolni, hogy az x_k pontokban f és e^x deriváltja azonos. E két összefüggés azt jelenti, hogy az x_k pontokban f grafikonja érinti az $x \mapsto e^x$ függvény grafikonját.

Hasonlóan, az $e^x \cdot \cos(x) = -e^x$ egyenlet megoldásával kapjuk, hogy az $y_k = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ pontokban f grafikonja érinti az $x \mapsto -e^x$ függvény grafikonját.

Szemléletesen: f "be van szorítva" e^x és $-e^x$ közé.

Határértékek: Mivel $-e^x \leq f(x) \leq e^x$, ezért $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. A $+\infty$-ben viszont f-nek nincs határértéke, mivel

$$\lim_{k \to +\infty} f(z_k) = \lim_{k \to \infty} 0 = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{k \to +\infty} f(x_k) = \lim_{k \to \infty} e^{2k\pi} = +\infty.$$

Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$. Ennek zérushelyei: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk: f a $\left[\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ intervallumokon csökken, a $\left[\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{9\pi}{4} + 2k\pi\right]$ intervallumokon nő $(k \in \mathbb{Z})$.

Az $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken lokális maximuma, az $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$ helyeken lokális minimuma van $(k \in \mathbb{Z})$.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = -2e^x \sin(x)$. Ennek zérushelyei: $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

f'' előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

f a $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ intervallumokon konkáv), a $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ intervallumokon konvex, az $x = k\pi$ helyeken inflexiós pontja van $(k \in \mathbb{Z})$.

Vegyük észre, hogy az inflexiós pontok éppen azok a helyek, ahol az f "hozzáér" az exponenciális függvényhez.

Értékkészlete: $R_f = \mathbb{R}$.