# 2. fejezet

# Számsorozatok, számsorok

## 2.1. Számsorozatok és számsorok

### 2.1.1. Számsorozat megadása, határértéke

Írjuk fel képlettel az alábbi sorozatok $n$-dik elemét! Vizsgáljuk meg, hogy a sorozat monoton, korlátos, illetve konvergens-e!

**2.1.**

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

**2.2.**

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{16},\ \frac{4}{25},\ \ldots$$

**2.3.**

$$-1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

**2.4.**

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$$

**2.5.**

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

**2.6.**

$$0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots$$

**2.7.**

$$1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ -\frac{7}{4},\ \ldots$$

**2.8.**

$$1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

Írjuk fel az alábbi, képlettel megadott sorozatok első néhány elemét! Vizsgáljuk meg, hogy a sorozat monoton-e, korlátos-e, konvergens-e!

**2.9.** $a_n = 3n$

**2.10.** $a_n = (-1)^n$

**2.11.** $a_n = 2 + 4n$

**2.12.** $a_n = -\dfrac{3}{n^2}$

**2.13.** $a_n = 3^n$

**2.14.** $a_n = \dfrac{1}{4^n - 1}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

**2.15**

$$a_n = 2n^2 - 7n + 4$$

$\boxed{\textbf{2.16}}$ $a_n = \dfrac{n^8 - 9}{n^9 + 12n^2 + 5}$

$\boxed{\textbf{2.17}}$ $a_n = \dfrac{3n-4}{5n+1}$

**2.18** $a_n = \dfrac{2n^2-7n+4}{3n^3+5n-8}$

**2.19** $a_n = \dfrac{2n^3-7n+4}{3n^2+5n-8}$

**2.20** $a_n = \dfrac{3n^5+4n-2}{7n^5+3n^3}$

**2.21** $a_n = \dfrac{2n^2-7n+4}{3n^2+5n-8}$

**2.22** $a_n = \dfrac{n^2-1}{n+5}$

**2.23** $a_n = \dfrac{-n^3+10n^2+25}{7n-5}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

**2.24** $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$\boxed{\textbf{2.25}}$ $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

**2.26** $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}$

**2.27** $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

**2.28** $a_n = n\sqrt[4]{n^4+n^2} - n^2$

**2.29** $a_n = \sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-10\sqrt{n}}$

**2.30** $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

**2.31** $a_n = \dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

$\boxed{\textbf{2.32}}$ $a_n = \dfrac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

**2.33** $a_n = n(\sqrt{n^2-1} - n)$

$\boxed{\textbf{2.34}}$ $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$

**2.35** $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

**2.36** $a_n = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots + \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$

**2.37** $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+2)}$

**2.38** $a_n = \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}$

**2.39** $a_n = \dfrac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$

$\boxed{\textbf{2.40}}$ $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

**2.41**

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

**2.42** $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1}$

**2.43** $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

**2.44** $a_n = \sqrt[n]{2^n+5^n}$

**2.45** $a_n = \sqrt[n]{n^6+2^n}$

**2.46** $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3+2n^2}{3^{2n}+7n}}$

**2.47** $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1}+n^4}{8^n+n^2}}$

Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok. Ha igen, akkor adjunk meg olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindexet, melynél nagyobb indexű elemek (a számsorozatban) az előírt $\varepsilon$-nál kisebb hibával közelítik meg a határértéket.

**2.48**

$$a_n = \frac{4n+3}{5n-1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$$

$\boxed{\textbf{2.49}}$

$$a_n = \frac{n-1}{2n+1} \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

**2.50**

$$a_n = \frac{4n+1}{7-5n} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

**2.51**

$$a_n = \frac{2}{(n+1)^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

$\boxed{\textbf{2.52}}$

$$a_n = \sqrt[n]{2} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$$

**2.53**

$$a_n = \frac{1}{3^n+1} \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

**2.54**

$$a_n = \frac{3n^2+1}{16-n^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

**2.55**

$$a_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$$

**2.56**

$$a_n = \frac{2n^5-7}{3n^5+n^4-2n^3-1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$$

Vizsgáljuk meg, hogy alábbi, $+\infty$-be tartó, sorozatokban milyen $N = N(K)$ küszöbindextől kezdve lesznek a sorozat elemei az adott $K$ számnál nagyobbak.

$\boxed{\textbf{2.57}}$

$$a_n = n^2 \qquad K = 10^6$$

$\boxed{\textbf{2.58}}$

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}+1} \qquad K = 6500$$

**2.59**

$$a_n = \frac{5^n}{3^{n+2}} \qquad K = 10^{30}$$

**2.60**

$$a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}} \qquad K = 10^{20}$$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

**2.61**

$$a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

**2.62**

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.63}}$

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

**2.64**

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

**2.65**

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}$$

**2.66**

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$$

**2.67**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$$

**2.68**

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n}$$

**2.69**

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-2}$$

**2.70**

$$a_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5}\right)^{4n+2}$$

**2.71**

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{3n+1}$$

**2.72**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+3}+3}$$

**2.73**

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

**2.74**

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

**2.75**

$$a_n = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{2^n}$$

**2.76**

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n^4}$$

$\boxed{\textbf{2.77}}$

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

$\boxed{\textbf{2.78}}$

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$$

Határozzuk meg az alábbi *rekurzív* sorozatok határértékét.

$\boxed{\textbf{2.79}}$ $a_n = \frac{1}{4} + a_{n-1}^2, \qquad a_0 = 0$

**2.80** $a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}}, \qquad a_0 = 0$

**2.81** $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \qquad a_0 = \sqrt{2}$

**2.82** $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4}, \qquad a_0 = 1$

## 2.1.2. Számsorok összege

Számítsuk ki a következő sorok összegét.

**2.83** $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\boxed{\textbf{2.84}}$ $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2 + 1}\right)^n, \qquad k \in \mathbb{R}$ rögz.

$\boxed{\textbf{2.85}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n}$

**2.86** $\sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n^2 - 5n}$

**2.87** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$

$\boxed{\textbf{2.88}}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 3n^2 + 2n}$

**2.89** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n + 5^n}{3^{2n}}$

**2.90** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

**2.91** Írjuk fel közönséges tört alakban az alábbi tizedes törteket:

$$s = 1.7\ 972\ 972\ 972\ ... \qquad t = 0.78\ 123\ 123\ ...$$

Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

**2.92**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$$

$\boxed{\textbf{2.93}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{n}$$

$\boxed{\textbf{2.94}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$\boxed{\textbf{2.95}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+2}{n^2+1}$$

**2.96**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{10n+2}$$

**2.97**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n+1)}$$

$\boxed{\textbf{2.98}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2}-27}$$

$\boxed{\textbf{2.99}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n+2}$$

**2.100**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**2.101**

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$$

**2.102**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+1}$$

**2.103**

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

**2.104**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

**2.105**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$

$\boxed{\textbf{2.106}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

**2.107**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$$

**2.108**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$$

**2.109**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

**2.110**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n}$$

$\boxed{\textbf{2.111}}$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

**2.112**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

**2.113**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

**2.114**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

**2.115**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$$

**2.116**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

**2.117**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

**2.118**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)(2n+1)}$$

**2.119**

$$\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$$

**2.120**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k}$$

**2.121**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

$\boxed{\textbf{2.122}}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \text{ahol} \qquad a_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{k+2} & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ \dfrac{1}{k} & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases}$$

**2.123**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-2)^n(n^2-n+1)}.$$

**2.124**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

**2.125**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

**2.126**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$$

## 2.1.3. Abszolút- ill. feltételes konvergencia

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi végtelen sorok melyik típusba tartoznak: abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens?

**2.127**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}$$

**2.128**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3+1}$$

**2.129**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+2}$$

**2.130**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

$\boxed{\textbf{2.131}}$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$$

**2.132**

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

**2.133**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$$

**2.134**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$$

**2.135**

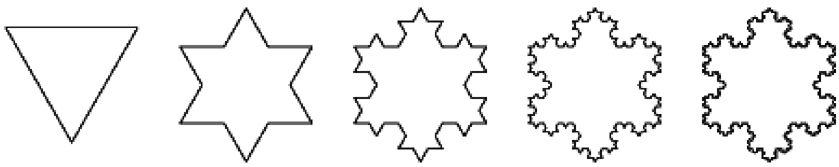
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

## 2.1.4. Alkalmazás: Geometriai feladatok

$\boxed{\textbf{2.136}}$ Képezzünk sokszöget egy szabályos $a$ oldalú, $T$ területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:

1. Osszunk minden oldalt 3 egyenlő részre.
2. Minden középső oldal szakaszra illesszünk szabályos háromszöget.

Ismételjük ezeket a lépéseket. Az így kapott sokszög az úgynevezett Koch-görbe. Mennyi a Koch görbe kerülete és területe?

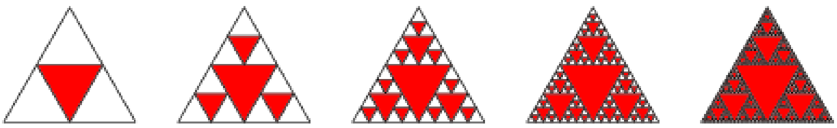


2.1. ábra. A Koch görbe konstrukciójának 1. - 5. lépése.

$\boxed{\mathbf{2.137}}$ Egységnyi területű szabályos háromszögbe beírjuk a középvonalai által alkotott háromszöget. Ezután vesszük az eredetivel egyállású részeket es azokba is beírjuk a kozépvonalai által alkotott háromszögeket. Ezt rekurzívan ismételjük. A kapott alakzat a SIERPINSKI háromszög.

A középvonalak által alkotott háromszögek összterülete hányadik iteráció után haladja meg a 175/256 értéket?

Mennyi a középvonalak által alkotott háromszögek területeinek összege?



2.2. ábra. A Sierpienski háromszög konstrukciójának 1. - 5. lépése.

## 2.2. Megoldás. Számsorozatok

### 2.2.1. Számsorozat megadása, határértéke

**2.1** A sorozat monoton növő (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról korlátos, felülről nem korlátos, tehát nem korlátos. Továbbá divergens, $+\infty$-be tart. $a_n = n^2$.

**2.2** A sorozat monoton fogyó, (sőt: szigorúan monoton fogyó). Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke: 0. $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

**2.3** A sorozat monoton növő (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról korlátos, felülről nem korlátos, tehát nem korlátos. Továbbá divergens, $+\infty$-be tart. $a_n = -4 + 3n$.

**2.4** A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke: 0. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$.

**2.5** A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá divergens, határértéke nincs. $a_n = (-1)^n$.

**2.6** A sorozat monoton növő, (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke: 1. $a_n = 1 - 10^{-(n+1)}$.

**2.7** A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá divergens, határértéke nincs. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n-1}{n}$.

**2.8** A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke: 1.

*Megjegyzés.* A 2.8 feladatban szereplő $(a_n)$ sorozat a $(b_n = 1)$ és a $\left(c_n = \dfrac{n+1}{n+2}\right)$ sorozatok "összefésülésével" keletkezett. Mivel páratlan $n$-ekre $a_n = 1$, páros $n$-ekre pedig

$$a_n = \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}+2} = \frac{n+2}{n+4},$$

ezért olyan törtet kell készítenünk, melynek nevezője $n+4$, számlálója pedig páratlan $n$-re $n+4$, páros $n$-re pedig $n+2$. Könnyen kaphatunk ilyen számlálót: $n+3+(-1)^n$.

**2.15** $\infty$.

**2.16**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8-9}{n^9+12n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{9}{n^8}}{n+\dfrac{12}{n^6}+\dfrac{5}{n^8}} = 0\,.$$

**2.17**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{1}{n}} = \frac{3}{5}\,.$$

**2.18** $0$.

**2.19** $\infty$.

**2.20** $\frac{3}{7}$.

**2.21** $\frac{2}{3}$.

**2.22** $\infty$.

**2.23** $-\infty$.

**2.24** $0$.

**2.25**

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0\,.$$

**2.26** $-\frac{1}{2}$.

**2.27** $\frac{1}{2}$.

**2.28** $\frac{1}{4}$.

**2.29** $7$.

**2.30** $1$.

**2.31** $3$.

**2.32**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!((n+2)+1)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6} = 0\,.$$

**2.33** $-\frac{1}{2}$.

**2.34**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(1+n)n}{2}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2} = \infty\,.$$

**2.35** 2.

**2.36** 9.

**2.37** $\frac{1}{2}$.

**2.38** 1.

**2.39** $\frac{1}{3}$.

**2.40** Teljes indukcióval belátható, hogy

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\,.$$

**2.41** $\frac{1}{2}$.

**2.42** 1.

**2.43** 0.

**2.44** 5.

**2.45** 2.

**2.46** $\frac{1}{9}$.

**2.47** 1.

*Megjegyzés.* A 2.48 - 2.60 feladatok végeredményében szereplő $N$ természetesen egy lehetséges küszöbindexet jelöl.

**2.48** Konvergens, $N = 760$.

**2.49** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$, továbbá

$$\left|a_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n-1}{2n+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2n-2-2n-1}{4n+2}\right|=\left|\frac{-3}{4n+2}\right|=\frac{3}{4n+2}\,.$$

Tehát olyan küszöböt kell találni, hogy a nála nagyobb $n$-ekre

$$\frac{3}{4n+2}<10^{-5}$$

teljesüljön. Ezt az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy $n>\frac{3\cdot 10^5-2}{4}$, tehát $N = 74999$ egy jó küszöbindex.

**2.50** Konvergens, $N = 13201$.

**2.51** Konvergens, $N = 140$.

**2.52** Ismert tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Továbbá $|\sqrt[n]{2} - 1| = \sqrt[n]{2} - 1 < 10^{-1}$, azaz $\sqrt[n]{2} < 1.1$. Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve kapjuk, - a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt - hogy $\frac{1}{n} < \log_2 1.1$, amiből $n > \frac{1}{\log_2 1,1} \approx 7.272$. Ezért $N = 7$ egy jó küszöbindex.

**2.53** Konvergens, $N = 12$.

**2.54** Konvergens, $N = 700$.

**2.55** Konvergens, $N = 200$.

**2.56** Konvergens, $N = 222$.

**2.57** Mivel $n^2 > 10^6 \iff n > 10^3$, ezért $N = 10^3$ jó lesz küszöbindexnek.

**2.58** A törtet bővítve $\frac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \frac{(\sqrt{n}-1)\cdot(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n} - 1$, így a vizsgálandó egyenlőtlenség: $\sqrt{n} - 1 > 6500$. Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy $N = 6501^2$.

**2.59** $N = 139$.

**2.60** $N = 115$.

**2.61** $e^3$.

**2.62** $e^{-2}$.

**2.63** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$.

**2.64** $e^2$.

**2.65** $\frac{1}{e}$.

**2.66** $e$.

**2.67** $e^2$.

**2.68** $\frac{1}{e^3}$.

**2.69** $e^2$.

**2.70** $e^{-6}$.

**2.71** 0.

**2.72** $e^8$.

**2.73** 0.

**2.74** 1.

**2.75** $e$.

**2.76** 0.

**2.77**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)\cdot\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \infty\cdot\frac{1}{e} = \infty\,.$$

**2.78** A számlálót az ismert összegképletek segítségével tudjuk zárt alakban felírni:

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Ennek alapján

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3} = \frac{1}{3}.$$

**2.79** Teljes indukcióval belátható, hogy a sorozat monoton növő, és felülről korlátos. Ebből következik, hogy konvergens, vagyis létezik a

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$$

véges határérték. A sorozatot megadó rekurzív képlet mindkét oldalának határértékét véve kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{4} + A^2.$$

Ennek az egyenletnek egyetlen megoldása $A = \frac{1}{2}$. Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

**2.80** 1.

**2.81** 2.

**2.82** 2.

### 2.2.2. Számsorok összege

**2.83** 3.

**2.84** Mértani sorról van szó, $q = \frac{k^2}{1+k^2} \in (-1, 1)$, tehát konvergens. Összegzése az ismert képlet segítségével történik:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{k^2}{k^2+1}} = k^2 + 1$$

**2.85** A sor $n$-edik részletösszege:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}.$$

Az összeg $k$-adik tagját parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right).$$

Ezt behelyettesítjük, majd az összeget átrendezzük:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} \right).$$

Ezután a második szumma indexét eltoljuk úgy, hogy a tagok $\frac{1}{k+3}$ helyett $\frac{1}{k}$ alakúak legyenek:

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} \right).$$

Végül - mindkét szummából leválasztva a megfelelő tagokat - a közös indextartományon vett összegek kiejtik egymást, s így kialakul $S_n$ zárt alakja:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \qquad (n \geq 4). \end{aligned}$$

Innen $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk a sor összegét:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{11}{18}.$$

**2.86** $\frac{137}{60}$.

**2.87** $\frac{1}{2}$.

**2.88** A sor $n$-edik részletösszege:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Az összeg $k$-adik tagját parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) .$$

Ezt behelyettesítjük, majd az összeget a 2.85 feladatban látott módon átalakítjuk (átrendezés, index eltolás, leválasztás, kiejtés):

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{(n \to \infty)} \frac{1}{4} .
\end{aligned}$$

A sor összege tehát $\frac{1}{4}$.

**2.89** $\frac{81}{20}$.

**2.90** 1.

**2.91** $s = \frac{399}{222}$ és $t = \frac{5203}{6660}$.

**2.92** Divergens.

**2.93** Konvergens. Pozitív tagú sor, melyet a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergens geometriai sor majorál.

**2.94** Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, ezért a sor divergens.

**2.95** A sor divergens, ugyanis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot n + 2}{n^2+1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 2}{(n+1)^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

a sort tehát a harmonikus sor minorálja, amely divergens.

**2.96** Divergens.

**2.97** Konvergens.

**2.98** Divergens, mert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+2}-27} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^2 - \frac{27}{3^n}} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

s így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

**2.99** Konvergens. Pozitív tagú sor, melyet majorál a $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergens geometriai sor.

**2.100** Divergens.

**2.101** Divergens.

**2.102** Divergens.

**2.103** Divergens.

**2.104** Konvergens.

**2.105** Divergens.

**2.106** Alkalmazzuk a gyök-kritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$$

ezért a vizsgált sor konvergens.

**2.107** Divergens.

**2.108** Divergens.

**2.109** Divergens.

**2.110** Konvergens.

**2.111** Divergens. Ugyanis

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-2},$$

s így

$$\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{2} \Big/ \binom{n}{3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n-2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ez a harmonikus sor viszont divergens.

**2.112** Konvergens.

**2.113** Konvergens.

**2.114** Konvergens.

**2.115** Konvergens.

**2.116** Divergens.

**2.117** Konvergens.

**2.118** Konvergens.

**2.119** Konvergens.

**2.120** Konvergens.

**2.121** Konvergens.

**2.122** A sor tagjai:

$$a_{2k-1} = -\frac{1}{(2k-1)+2} = -\frac{1}{2k+1}\,, \qquad a_{2k} = \frac{1}{2k} \qquad (k \in \mathbb{N})\,.$$

Jelölje a sor $n$-edik részletösszegét $S_n$. A páros indexű részletösszegek:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n} = \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \left( -\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots\,, \end{aligned}$$

amiből látszik, hogy $(S_{2n})$ egy konvergens Leibniz-típusú sor részletösszegeinek sorozatával egyenlő. Ezért konvergens, jelöljük a határértékét $S$-sel. A páratlan indexű részletösszegek is $S$-hez tartanak, ugyanis

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{(n\to\infty)} S - 0 = S\,.$$

Ezért $(S_n)$ konvergens, vagyis a vizsgált sor konvergens.

*Megjegyzés.* A fenti feladatban szereplő sor példa olyan esetre, amikor a sor csupán a monotonitás hiánya miatt nem Leibniz-típusú. Ennek ellenére konvergens.

## 2.2.3. Abszolút- ill. feltételes konvergencia

**2.123** Konvergens.

**2.124** Konvergens.

**2.125** Divergens.

**2.126** Konvergens.

**2.127** Feltételesen konvergens.

**2.128** Abszolút konvergens.

**2.129** Abszolút konvergens.

**2.130** Feltételesen konvergens.

**2.131** Vizsgáljuk az $(S_n)$ részletösszeg-sorozat páros indexű tagjait:

$$S_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1-\sqrt{k}}{k} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{k}$$

Itt alkalmazhatjuk a minoráns kritériumot, ugyanis $k \geq 4$ esetén $\sqrt{k} - 1 \geq \frac{\sqrt{k}}{2}$, s ezt felhasználva

$$\frac{\sqrt{k}-1}{k} \geq \frac{\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{2\sqrt{k}}\,,$$

továbbá tudjuk, hogy a $\sum \frac{1}{2\sqrt{k}}$ sor divergens. Ezért az $(S_{2n})$ részletösszeg-részsorozat divergens, amiből következik, hogy $(S_n)$ is divergens. A vizsgált sor tehát divergens.

*Megjegyzés.* A feladatban szereplő sor példa olyan esetre, amikor a sor csupán a monotonitás hiánya miatt nem Leibniz-típusú, és nem is konvergens.

## 2.2.4. Alkalmazás: Geometriai feladatok

**2.132** Feltételesen konvergens.

**2.133** Feltételesen konvergens.

**2.134** Abszolút konvergens.

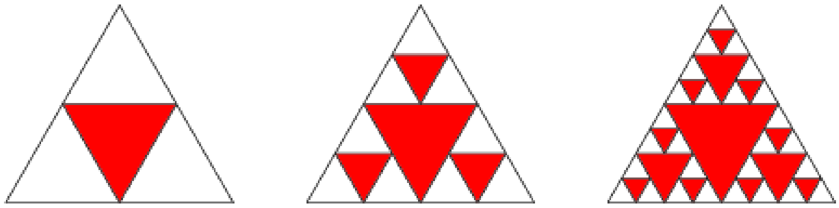
**2.135** Feltételesen konvergens.

**2.136** A feladat megoldása a jegyzet I. kötet 52. oldalán található.

$$K_{Koch} = \infty, \quad T_{Koch} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5} = \frac{8T}{5}.$$

**2.137** Mivel a középvonalak által meghatározott háromszög $\frac{1}{2}$-szeres kicsinyítése a háromszögnek, ezért területe $\frac{1}{4}$-szerese annak a háromszögének, amelybe beleírjuk.

Ennek alapján a középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) száma és összterülete az alábbi módon adható meg:



2.3. ábra. A Sierpienski háromszög konstrukciójának 1., 2. és 3. lépése.

Az első ábrán 1 db $\frac{1}{4}$ területű háromszög.

A második ábrán 1 db $\frac{1}{4}$, továbbá még 3 db $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^2}$ területű háromszög.

A harmadik ábrán ugyanaz, mint a második ábrán, továbbá még $3^2$ db $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4^3}$ területű háromszög.

És így tovább, teljes indukcióval megmutatható, hogy az $n$-edik ábrán beszínezett háromszögek összterülete:

$$T_n = 3^0 \cdot \frac{1}{4^1} + 3^1 \cdot \frac{1}{4^2} + 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots + 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

A mértani sorozat első $n$ tagjára vonatkozó képlettel kapjuk, hogy az $n$-edik ábrán beszínezett háromszögek összterülete:

$$T_n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

A kapott képlet alapján válaszolhatunk a feladat kérdéseire:

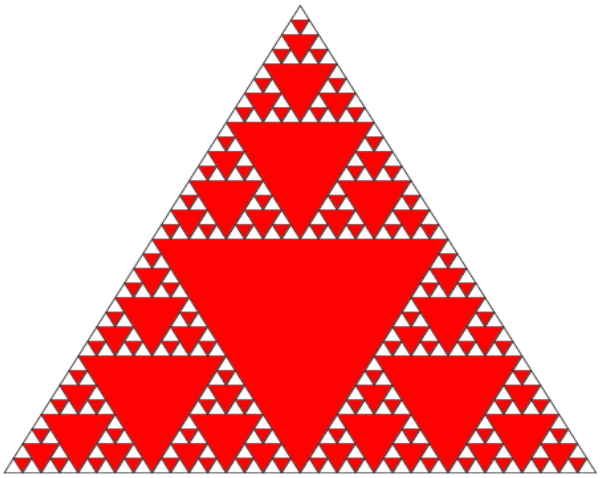
a) Megoldandó a $T_n > \frac{175}{256}$ egyenlőtlenség, azaz:

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{175}{256}; \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1 - \frac{175}{256} = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

Ebből adódik, hogy $n > 4$. Sőt az is látható, hogy $n = 4$ esetén egyenlőség van. Tehát a középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) összterülete a negyedik ábrán éppen $\frac{175}{256}$, s ezt az értéket először az ötödik ábrán haladja meg.

b) A középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) összterülete:

$$\lim T_n = \lim(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n) = 1,$$



2.4. ábra. A beszínezett háromszögek összterülete elöször nagyobb, mint $\frac{175}{256}$.

ami megegyezik az eredeti háromszög területével. *Megjegyzés.* A feladatot egyszerűbben is meg tudjuk oldani, ha nem a beszínezett, hanem a fehéren maradt háromszögek összterületét számoljuk. Ez a terület mindegyik ábrán – mint az könnyen látható – 3/4-szerese az előző ábrán lévő fehér területnek. Tehát az $n$-edik ábrán lévő fehér terület: $(3/4)^n$. Ebből következik, hogy a beszínezett terület az $n$-edik ábrán $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.