Matematikai Analízis I.
Példatár

Vágó Zsuzsanna
Csörgő István

ISBN 978-963-284-448-0

Tartalomjegyzék

Bevezető

A PPKE ITK Mérnök informatikus és Molekuláris bionika szakán, valamint az ELTE IK Informatika minor szakon és esti tagozaton oktatott Matematikai Analízis tárgyakhoz kiadott elméleti jegyzetek mellett most egy megfelelő példatárat is adunk a diákok kezébe. Az elméleti jegyzetek a Pázmány Egyetem eKiadónál jelentek meg: Vágó Zsuzsanna: Matematikai Analízis I és II.

A diákok számára bizonyára nagy segítség az adott jegyzetek felépítéséhez illő feladatgyűjtemény. Minden feladat megoldásának végeredményét közöljük. Az elmélet alaposabb elsajátítását igyekszünk azzal segíteni, hogy bizonyos feladatokhoz kapcsolódóan részletesen kidolgozott megoldásokat is találhatnak.

Ebben a kötetben a két féléves tananyag első feléhez adunk gyakorló feladatokat. Tervezzük, hogy jelen munka folytatásaként, a második félévben sorra kerülő anyagrészekhez is hasonló példatárat állítunk össze.

Szeretnénk hálás köszönetet mondani dr. Szilvay Gézáné Panni néniek, aki a Példatár végleges formájának kialakítása során biztos hátterünk volt. Lelkiismeretes lektorként a végeredmények ellenőrzésében igen nagy segítségünkre volt.

Budapest, 2013. szeptember 9.

Vágó Zsuzsanna és Csörgő István

1. fejezet

Valós számok

1.1. Valós számok

1.1.1. Teljes indukció

Igazoljuk a teljes indukcióval a következő állítások helyességét:

1.1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

1.2. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + \cdots + n \cdot (3n+1) = n(n+1)^2.$

1.3.

$$a)\quad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) = n+1. \qquad b)\quad \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} \qquad (n \geq 2).$$

1.4. $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

1.5. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

1.6. $\cos(x) \cdot \cos(2x) \cdot \cos 2^2 x \ldots \cos 2^n x = \dfrac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1}\sin(x)}.$

1.7. $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ *osztható* 133-*mal.*

1.8. $4^n + 15n - 1$ *osztható* 9-*cel.*

1.9. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$

1.1.2. Egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket:

1.10. $\dfrac{37-2x}{3} + 9 \leq \dfrac{3x-8}{4}.$

1.11. $8x - 4x^2 < 3.$

1.12. $x^2 + 5x - 14 \geq 0.$

1.13. $x^2 - 3x - 4 \leq 0.$

1.14. $(x^3-1)(x-1)\geq 0.$

1.15. $\dfrac{x-5}{x+3}>0.$

1.16. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{x-1}}>1.$

1.17. $|2x-3|<2.$

1.18. $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leq 1.$

1.19. $\dfrac{|x+2|}{|x-1|}\geq 1.$

1.20. $|3\lg x-1|<2.$

1.21. $\sin|2x-4|<\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

1.1.3. Közepek

Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával a következő állításokat:

1.22.

a) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\qquad(n\in\mathbb{N})$ *b)* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<4\qquad(n\in\mathbb{N})$

1.23. $\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\right)\geq n^2\qquad(n\in\mathbb{N},\ a_i>0)$

1.24. $n\,!<\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n\qquad(n\in\mathbb{N},\ n\geq 2)$

1.25.

$$a)\quad (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\geq 8abc\qquad(a,b,c>0),$$

$$b)\quad (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\leq\frac{8}{27}\cdot(a+b+c)^3\qquad(a,b,c>0)$$

Oldjuk meg a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával az alábbi szélsőérték-feladatokat.

1.26. *Adott $k > 0$ kerületű téglalapok közül melyiknek a területe a legnagyobb?*

1.27. *Egy folyó partján adott $l > 0$ hosszúságú kerítéssel egy téglalap alakú telket szeretnénk elkeríteni úgy, hogy a telek egyik határa a folyópart (ott nem kell kerítés). Hogyan válasszuk meg a téglalap oldalait, hogy a telek területe a lehető legnagyobb legyen?*

1.28. *Hogyan válasszuk meg egy felülről nyitott, henger alakú edény méreteit, hogy elkészítéséhez a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség?*

További közepekkel kapcsolatos feladatok

1.29. *Igazolja a mértani és a harmonikus közép közti egyenlőtlenségről szóló tételt:*

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_i > 0),$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

Megjegyzés: a bal oldalon álló mennyiséget az $a_1, \ldots, a_n$ számok harmonikus közepének nevezzük.

1.30. *Igazolja a számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenségről szóló tételt:*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ a_i \geq 0),$$

és egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a_1 = \ldots = a_n$.

1.31. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, és jelölje m az $a_1, \ldots, a_n$ pozitív számok közül a legkisebbet, M pedig a legnagyobbat. Jelölje továbbá H_n ugyanezen számok harmonikus közepét, G_n a mértani közepét, A_n a számtani közepét, Q_n pedig a négyzetes közepét. Igazolja, hogy mind a négy közép m és M közé esik, azaz, hogy*

$$m \leq H_n \leq M, \qquad m \leq G_n \leq M, \qquad m \leq A_n \leq M, \qquad m \leq Q_n \leq M\,,$$

továbbá ha az $a_1, \ldots, a_n$ számok nem mind egyenlők, akkor

$$m < H_n < M, \qquad m < G_n < M, \qquad m < A_n < M, \qquad m < Q_n < M\,.$$

1.1.4. Számhalmazok

Vizsgáljuk meg az alábbi halmazokat korlátosság, alsó és felső határ, legkisebb és legnagyobb elem szempontjából:

1.32. $H = \left\{ \dfrac{4n-2}{2n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1.33. $H = \left\{ \dfrac{5n+3}{3n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1.34. $H = \left\{ \dfrac{n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

1.35. $H = \left\{ \dfrac{3n+5}{n-3} \mid n \in \mathbb{N},\, n \geq 4 \right\}$

1.2. Megoldás. Valós számok

1.2.1. Teljes indukció

1.1.

1.2.

1.3. Megoldás *a) $n = 1$ esetén az állítás igaz, mivel mindkét oldal értéke* 2.

Az indukciós lépés:

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right).$$

Az indukciós feltevés miatt az első tényezőben álló produktum helyére $n+1$ írható, ezért a folytatás:

$$(n+1)\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = n+2,$$

ami az állítás $n+1$-re való bizonyítását jelenti.

b) Az a) részhez hasonlóan igazolható, de vigyázzunk, az indukció $n = 2$-ről indul.

$n = 2$ esetén az állítás igaz, mivel mindkét oldal értéke $\frac{1}{2}$.

Az indukciós lépés:

$$\prod_{k=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \left(\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Az indukciós feltevés miatt az első tényezőben álló produktum helyére $\frac{1}{n}$ írható, ezért a folytatás:

$$\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+1-1}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

ami az állítás $n+1$-re való bizonyítását jelenti.

1.4.

1.5.

1.6. Megoldás *$n = 0$-ra az egyenlőség egy ismert trigonometrikus azonosság átrendezése.*

Az indukciós lépés:

$$\cos x\cos 2x\cos 2^2x\ldots\cos 2^nx\cos 2^{n+1}x = \frac{\sin 2^{n+1}x\cos 2^{n+1}x}{2^{n+1}\sin x} = \frac{\sin 2^{n+2}x}{2^{n+2}\sin x}.$$

Az első egyenlőség az indukciós feltételből, a második a $2\cos y\sin y = \sin 2y$ azonosságból ($y = 2^{n+1}x$ helyettesítéssel) adódik.

1.7. Megoldás

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \equiv (121 + 12) \cdot 11^n \equiv 0 \ (mod 133)$$

Az első kongruencia $144 \equiv 11 \ (mod\ 133)$ *miatt adódik.*

1.2.2. Egyenlőtlenségek

1.8.

1.9.

1.10. $x \geq 56$

1.11. $x < \frac{1}{2}, x > \frac{3}{2}$

1.12. $x \leq -7, \quad x \geq 2$

1.13. $-1 \leq x \leq 4$

1.14. $-\infty < x < \infty$

1.15. $x > 5, \quad x < 3$

1.16. Megoldás *Az egyenlőtlenség azokra az* x *valós számokra van értelmezve, melyekre*

$$x - 1 \neq 0 \qquad \textit{és} \qquad \frac{3x-1}{x-1} \geq 0.$$

Ezen a tartományon az egyenlőtlenség ekvivalens az alábbival:

$$\frac{3x-1}{x-1} > 1.$$

0*-ra redukálás és rendezés után kapjuk, hogy*

$$\frac{2x}{x-1} > 0.$$

Ennek első esete az, ha $2x > 0$ *és* $x-1 > 0$*, második esete pedig ha* $2x < 0$ *és* $x-1 < 0$*. Az első eset megoldása* $x > 1$*, a második esete pedig* $x < 0$*. Mivel ezekre az* x*-ekre teljesül, hogy* $\frac{3x-1}{x-1} > 1$*, ezért ezek az* x*-ek mind benne vannak az egyenlőtlenség értelmezési tartományában. Tehát a feladat megoldása:*

$$x < 0 \qquad \textit{vagy} \qquad x > 1.$$

1.17. $\dfrac{1}{2} < x < 5$

1.18. $x \geq 0$ *vagy* $x \leq -2$

1.19. $x \geq -\frac{1}{2}$

1.20. $10^{-1/3} < x < 10$

1.21. Megoldás *Az egyenlőtlenség minden valós számra értelmezett. Először a trigonometrikus részt oldjuk meg, azaz* $y = |2x - 4|$ *helyettesítés után (új ismeretlen bevezetése) megoldjuk a*

$$\sin y < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

egyenlőtlenséget. A középiskolában megismert módszerek valamelyikét alkalmazva (egységkör vagy függvény ábrázolás) ennek megoldása:

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < y < 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek után egy paraméteres abszolút-értékes egyenlőtlenség-rendszert kell megoldanunk, ahol k *a paraméter:*

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < |2x - 4| < 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Keressük először a $2x - 4 \geq 0$*, azaz az* $x \geq 2$ *feltételt kielégítő megoldásokat. Ekkor az abszolút érték elhagyható, és a*

$$\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2x - 4 < 2\pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

lineáris egyenlőtlenségekhez jutunk. Ezek rendezéssel könnyen megoldhatók:

$$2 + \frac{2\pi}{6} + k\pi < x < 2 + \frac{7\pi}{6} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezek a nyílt intervallumok $k \geq 0$ *esetén teljes egészében a* $[2, +\infty)$ *intervallumba esnek,* $k < -1$ *esetben nincs közös pontjuk a* $[2, +\infty)$ *intervallummal,* $k = -1$ *esetben pedig a közös rész:* $2 < x < 2 + \dfrac{\pi}{6}$.

Ennek alapján az $x \geq 2$ *feltételt kielégítő megoldások:*

$$2 < x < 2 + \frac{\pi}{6} \quad \textit{vagy} \quad 2 + \frac{2\pi}{6} + k\pi < x < 2 + \frac{7\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z},\, k \geq 0).$$

Második esetként keressük a $2x-4<0$ feltételt kielégítő megoldásokat. Ekkor az abszolút érték úgy hagyható el, hogy a benne szereplő kifejezés ellentettjét vesszük:

$$\frac{2\pi}{3}+2k\pi<-2x+4<2\pi+\frac{\pi}{3}+2k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Ezek a lineáris egyenlőtlenség-rendszerek rendezéssel könnyen megoldhatók:

$$2-\frac{7\pi}{6}-k\pi<x<2-\frac{2\pi}{6}-k\pi \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Ezek a nyílt intervallumok $k\geq 0$ esetén teljes egészében a $[-\infty,2)$ intervallumba esnek, $k<-1$ esetben nincs közös pontjuk a $[-\infty,2)$ intervallummal, $k=-1$ esetben pedig a közös rész: $2-\frac{\pi}{6}<x<2$.

Ennek alapján az $x<2$ feltételt kielégítő megoldások:

$$2-\frac{\pi}{6}<x<2 \quad vagy \quad 2-\frac{7\pi}{6}-k\pi<x<2-\frac{2\pi}{6}-k\pi \quad (k\in\mathbb{Z},\ k\geq 0).$$

A két esetben kapott megoldások halmazának egyesítése után kapjuk a feladat megoldását:

$$2-\frac{\pi}{6}<x<2+\frac{\pi}{6} \quad vagy \quad 2-\frac{7\pi}{6}-k\pi<x<2-\frac{2\pi}{6}-k\pi$$

vagy

$$2+\frac{2\pi}{6}+k\pi<x<2+\frac{7\pi}{6}+k\pi,$$

ahol $k\geq 0$ egész szám.

1.2.3. Közepek

1.22. Megoldás *a) Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az alábbi $n+1$ db számra:*

$$\underbrace{1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}}_{n\ db},\ 1$$

b) Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az alábbi $n+2$ db számra:

$$\underbrace{1+\frac{1}{n},\ \ldots,\ 1+\frac{1}{n}}_{n\ db},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$$

1.23. Megoldás *Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az $a_1,\ldots,a_n$ számokra, továbbá az $\frac{1}{a_1},\ldots,\frac{1}{a_n}$ számokra.*

1.24. Megoldás *Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az* $1, \dots, n$ *számokra, majd használjuk fel az első* n *természetes szám összegére tanult képletet.*

1.25. Megoldás *a) Alkalmazzuk a két szám számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenséget az alábbi számpárokra:*

$$a, b \qquad b, c \qquad c, a$$

b) Alkalmazzuk a három szám számtani és mértani közepe közti egyenlőtlenséget az $a+b$, $b+c$, $c+a$ *számokra.*

1.26. Megoldás *Ha a téglalap oldalait* x *és* y *jelöli, akkor az* xy *maximumát keressük az*

$$x > 0, \quad y > 0, \quad 2x + 2y = k$$

feltételek mellett. Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az x *és* y *számokra:*

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{k/2}{2}\right)^2 = \frac{k^2}{16}.$$

Azonban a jobb oldalon álló $\frac{k^2}{16}$ *mennyiség állandó, ezért a bal oldalon álló* xy *szorzat akkor és csak akkor veszi fel a legnagyobb értékét, ha a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz, ha* $x = y$. *Az optimális téglalap tehát a* $\frac{k}{4}$ *oldalú négyzet.*

1.27. Megoldás *Jelölje a téglalapnak a folyóval párhuzamos oldalát* x, *a folyóra merőleges oldalát pedig* y. *Keressük az* xy *kifejezés maximumát az*

$$x > 0, \quad y > 0, \quad x + 2y = l$$

feltételek mellett. Alakítsuk át az xy *kifejezést, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az* x *és a* $2y$ *számokra:*

$$xy = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2y \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x+2y}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{8}.$$

Azonban a jobb oldalon álló $\frac{l^2}{8}$ *mennyiség állandó, ezért a bal oldalon álló* xy *szorzat akkor és csak akkor veszi fel a legnagyobb értékét, ha a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz, ha* $x = 2y$. *Az optimális téglalap oldalai tehát* $x = \frac{l}{2}$ *és* $y = \frac{l}{4}$.

1.28. Megoldás *Jelölje a henger sugarát* r, *magasságát* m. *Keressük az* $A = r^2\pi + 2r\pi m$ *kifejezés minimumát az*

$$r > 0, \quad m > 0, \quad r^2\pi m = V$$

feltételek mellett. Alakítsuk át az A kifejezést, majd alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az $r^2\pi$, $r\pi m$, $r\pi m$ *számokra:*

$$A = r^2\pi + 2r\pi m = 3 \cdot \frac{r^2\pi + r\pi m + r\pi m}{3} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{r^2\pi \cdot r\pi m \cdot r\pi m}\,.$$

A jobb oldalt átalakítjuk:

$$3 \cdot \sqrt[3]{r^2\pi \cdot r\pi m \cdot r\pi m} = 3 \cdot \sqrt[3]{r^4\pi^3 m^2} = 3 \cdot \sqrt[3]{(r^2\pi m)^2\pi} = 3 \cdot \sqrt[3]{V^2\pi}\,.$$

Látható, hogy a jobb oldalon álló $3 \cdot \sqrt[3]{V^2\pi}$ *mennyiség állandó, ezért a minimalizálandó A kifejezés akkor és csak akkor veszi fel a legkisebb értékét, ha a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben egyenlőség van, azaz, ha*

$$r^2\pi = r\pi m = r\pi m, \quad \text{azaz, ha} \quad r = m\,.$$

Az optimális edény méretei tehát $r = m = \sqrt[3]{\dfrac{V}{\pi}}$.

1.29. Megoldás *Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az*

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n}$$

számokra, majd rendezzük át a kapott eredményt.

1.30. Megoldás *A bizonyítandó egyenlőtlenséget ekvivalens átalakításokkal az alábbi alakra hozzuk:*

$$(a_1 + \ldots + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

Végezzük el a bal oldalon a négyzetre emelést, majd rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2a_i a_j \leq n \cdot (a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

$$0 \leq (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} 2a_i a_j$$

A jobb oldalon szereplő különbség első tagja átrendezhető az alábbi formára:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i^2 + a_j^2)\,,$$

ugyanis

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i^2+a_j^2)=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_j^2=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}a_i^2+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_j^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)\cdot a_i^2+\sum_{j=2}^{n}(j-1)\cdot a_j^2=(n-1)\cdot a_1^2+\sum_{i=2}^{n-1}(n-i+i-1)\cdot a_i^2+$$

$$+(n-1)\cdot a_n^2=(n-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2\,.$$

Ennek felhasználásával a bizonyítandó egyenlőtlenség így írható:

$$0\le\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i^2+a_j^2)-\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}2a_ia_j$$

$$0\le\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i^2+a_j^2-2a_ia_j)$$

$$0\le\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(a_i-a_j)^2$$

Ez pedig nyilvánvalóan igaz (négyzetösszeg ≥ 0), és az egyenlőségre vonatkozó állítás igazolása is könnyen kiolvasható belőle.

Megjegyzés: A bizonyítás teljesen elemi volt, de mégis kissé bonyolult az összeg átrendezése miatt. A számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenség lényegesen egyszerűbben igazolható a lineáris algebrában később sorra kerülő Cauchy-egyenlőtlenség alkalmazásával.

1.31. Megoldás *Használjuk fel, hogy $i=1,\ldots,n$ esetén $m\le a_i\le M$, továbbá, ha az $a_1,\ldots,a_n$ számok nem mind egyenlők, akkor ezek között az egyenlőtlenségek között vannak olyanok, amelyek szigorú formában teljesülnek.*

1.2.4. Számhalmazok

1.32. Megoldás *Mivel* $\dfrac{4n-2}{2n+3}=2-\dfrac{8}{2n+3}$, *ezért*

$$H=\left\{\frac{4n-2}{2n+3}\mid n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{2-\frac{8}{2n+3}\mid n\in\mathbb{N}\right\}.$$

Ebből látható, hogy n növelésével a halmaz elemei egyre nagyobbak. Ezért a legkisebb elemet $n = 1$-re kapjuk:

$$\min H = 2 - \frac{8}{2 \cdot 1 + 3} = \frac{2}{5}\,.$$

Mivel van minimum, ez egyben a halmaz legnagyobb alsó korlátja is: $\inf H = \frac{2}{5}$*.A halmaz alulról korlátos.*

Most bebizonyítjuk, hogy a halmaz legkisebb felső korlátja 2, azaz, hogy $\sup H = 2$. *Ez két lépésben történik: először belátjuk, hogy a 2 felső korlát, majd pedig azt, hogy bármely, 2-nél kisebb szám már nem felső korlát. Az első lépés igazolása egyszerű: mivel* $\frac{8}{2n+3} > 0$*, ezért*

$$2 - \frac{8}{2n+3} < 2 \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

A második lépés igazolásához vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számot, és mutassuk meg, hogy a $2 - \varepsilon$ szám nem felső korlátja H-nak. Ehhez elegendő egyetlen olyan H-beli elem létezését bizonyítani, amely nagyobb, mint $2 - \varepsilon$:

$$2 - \frac{8}{2n+3} > 2 - \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$n > \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{\varepsilon} - 3\right)\,.$$

Ilyen $n \in \mathbb{N}$ szám pedig létezik az arkhimédeszi axióma miatt.

Mivel találtunk felső korlátot, a halmaz felülről korlátos.

Mivel a halmaz minden eleme kisebb, mint 2, ezért $\sup H \notin H$*, amiből következik, hogy a halmaznak nincs maximuma:* $\nexists \max H$.

1.33. Megoldás *A halmaz alulról korlátos,* $\inf H = \min H = \frac{8}{7}$*, továbbá a halmaz felülről korlátos,* $\sup H = \frac{5}{3}$*, maximuma nincs.*

1.34. Megoldás *Mivel*

$$\frac{n+3}{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2},$$

ezért

$$H = \left\{\frac{n+3}{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2} \mid n \in \mathbb{N}\right\}\,.$$

Ebből látható, hogy n növelésével a halmaz elemei egyre kisebbek. Ezért a legnagyobb elemet $n = 1$-re kapjuk:

$$\max H = \frac{1}{2} + \frac{5}{4 \cdot 1 + 2} = \frac{4}{3}\,.$$

Mivel van maximum, ez egyben a halmaz legkisebb felső korlátja is: $\sup H = \frac{4}{3}$*. A halmaz felülről korlátos.*

Most bebizonyítjuk, hogy a halmaz legnagyobb alsó korlátja $\frac{1}{2}$*, azaz, hogy* $\inf H = \frac{1}{2}$*. Ez két lépésben történik: először belátjuk, hogy az* $\frac{1}{2}$ *alsó korlát, majd pedig azt, hogy bármely,* $\frac{1}{2}$*-nél nagyobb szám már nem alsó korlát. Az első lépés igazolása egyszerű: mivel* $\frac{5}{4n+2} > 0$*, ezért*

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2} > \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

A második lépés igazolásához vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ *számot, és mutassuk meg, hogy az* $\frac{1}{2} + \varepsilon$ *szám nem alsó korlátja* H*-nak. Ehhez elegendő egyetlen olyan* H*-beli elem létezését bizonyítani, amely kisebb, mint* $\frac{1}{2} + \varepsilon$*:*

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{4n+2} < \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve kapjuk, hogy

$$n > \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{5}{\varepsilon} - 2\right)\,.$$

Ilyen $n \in \mathbb{N}$ *szám pedig létezik az arkhimédeszi axióma miatt.*

Mivel találtunk alsó korlátot, a halmaz alulról korlátos.

Mivel a halmaz minden eleme nagyobb, mint $\frac{1}{2}$*, ezért* $\inf H \notin H$*, amiből következik, hogy a halmaznak nincs minimuma:* $\nexists \min H$*.*

1.35. Megoldás *Vigyázzunk, n értéke nem 1-től, hanem 4-től indul. A halmaz felülről korlátos,* $\sup H = \max H = 17$*, továbbá a halmaz alulról korlátos,* $\inf H = 3$*, minimuma nincs.*

2. fejezet

Számsorozatok, számsorok

2.1. Számsorozatok és számsorok

2.1.1. Számsorozat megadása, határértéke

Írjuk fel képlettel az alábbi sorozatok n-dik elemét! Vizsgáljuk meg, hogy a sorozat monoton, korlátos, illetve konvergens-e!

2.1.

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \ldots$$

2.2.

$$\frac{1}{4},\ \frac{2}{9},\ \frac{3}{16},\ \frac{4}{25},\ \ldots$$

2.3.

$$-1,\ 2,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

2.4.

$$1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{4},\ \ldots$$

2.5.

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$

2.6.

$$0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ 0,9999;\ \ldots$$

2.7.

$$1,\ -\frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ -\frac{7}{4},\ \ldots$$

2.8.

$$1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{4}{5},\ \ldots$$

Írjuk fel az alábbi, képlettel megadott sorozatok első néhány elemét! Vizsgáljuk meg, hogy a sorozat monoton-e, korlátos-e, konvergens-e!

2.9. $a_n = 3n$

2.10. $a_n = (-1)^n$

2.11. $a_n = 2 + 4n$

2.12. $a_n = -\frac{3}{n^2}$

2.13. $a_n = 3^n$

2.14. $a_n = \frac{1}{4^n - 1}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

2.15.

$$a_n = 2n^2 - 7n + 4$$

2.16. $a_n = \frac{n^8 - 9}{n^9 + 12n^2 + 5}$

2.17. $a_n = \frac{3n - 4}{5n + 1}$

2.18. $a_n = \frac{2n^2 - 7n + 4}{3n^3 + 5n - 8}$

2.19. $a_n = \frac{2n^3 - 7n + 4}{3n^2 + 5n - 8}$

2.20. $a_n = \frac{3n^5 + 4n - 2}{7n^5 + 3n^3}$

2.21. $a_n = \frac{2n^2 - 7n + 4}{3n^2 + 5n - 8}$

2.22. $a_n = \frac{n^2 - 1}{n + 5}$

2.23. $a_n = \frac{-n^3 + 10n^2 + 25}{7n - 5}$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét:

2.24. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

2.25. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

2.26. $a_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2+n}$

2.27. $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

2.28. $a_n = n\sqrt[4]{n^4+n^2} - n^2$

2.29. $a_n = \sqrt{n+4\sqrt{n}} - \sqrt{n-10\sqrt{n}}$

2.30. $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

2.31. $a_n = \dfrac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$

2.32. $a_n = \dfrac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$

2.33. $a_n = n(\sqrt{n^2-1} - n)$

2.34. $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$

2.35. $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$

2.36. $a_n = \dfrac{9}{4} + \dfrac{27}{16} + \cdots + \dfrac{3^{n+1}}{2^{2n}}$

2.37. $a_n = \dfrac{1+2+\cdots+n}{(n+1)(n+2)}$

2.38. $a_n = \dfrac{1+3+\cdots+(2n-1)}{2+4+\cdots+2n}$

2.39. $a_n = \dfrac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3}$

2.40. $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$

2.41.

$$a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

2.42. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{n+1}$

2.43. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

2.44. $a_n = \sqrt[n]{2^n+5^n}$

2.45. $a_n = \sqrt[n]{n^6+2^n}$

2.46. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^3+2n^2}{3^{2n}+7n}}$

2.47. $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{2^{3n+1}+n^4}{8^n+n^2}}$

Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorozatok. Ha igen, akkor adjunk meg olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindexet, melynél nagyobb indexű elemek (a számsorozatban) az előírt ε-nál kisebb hibával közelítik meg a határértéket.

2.48.

$$a_n = \frac{4n+3}{5n-1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$$

2.49.

$$a_n = \frac{n-1}{2n+1} \qquad \varepsilon = 10^{-5}$$

2.50.

$$a_n = \frac{4n+1}{7-5n} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

2.51.

$$a_n = \frac{2}{(n+1)^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

2.52.

$$a_n = \sqrt[n]{2} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$$

2.53.

$$a_n = \frac{1}{3^n + 1} \qquad \varepsilon = 10^{-6}$$

2.54.

$$a_n = \frac{3n^2 + 1}{16 - n^2} \qquad \varepsilon = 10^{-4}$$

2.55.

$$a_n = \sqrt{\frac{n+4}{n}} \qquad \varepsilon = 10^{-1}$$

2.56.

$$a_n = \frac{2n^5 - 7}{3n^5 + n^4 - 2n^3 - 1} \qquad \varepsilon = 10^{-3}$$

Vizsgáljuk meg, hogy alábbi, $+\infty$-be tartó, sorozatokban milyen $N = N(K)$ küszöbindextől kezdve lesznek a sorozat elemei az adott K számnál nagyobbak.

2.57.

$$a_n = n^2 \qquad K = 10^6$$

2.58.

$$a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n} + 1} \qquad K = 6500$$

2.59.

$$a_n = \frac{5^n}{3^{n+2}} \qquad K = 10^{30}$$

2.60.

$$a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}} \qquad K = 10^{20}$$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

2.61.

$$a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$$

2.62.

$$a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

2.63.

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

2.64.

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$$

2.65.

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}$$

2.66.

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^n$$

2.67.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$$

2.68.

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{3n}$$

2.69.

$$a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n-2}$$

2.70.

$$a_n = \left(\frac{3n-4}{3n+5}\right)^{4n+2}$$

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét.

2.71.

$$a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^{3n+1}$$

2.72.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{2^n - 1}\right)^{2^{n+3}+3}$$

2.73.

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

2.74.

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n}$$

2.75.

$$a_n = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^{2^n}$$

2.76.

$$a_n = \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^{n^4}$$

2.77.

$$a_n = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$$

2.78.

$$a_n = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$$

Határozzuk meg az alábbi *rekurzív* sorozatok határértékét.

2.79. $a_n = \frac{1}{4} + a_{n-1}^2, \qquad a_0 = 0$

2.80. $a_n = \frac{2}{1 + a_{n-1}}, \quad a_0 = 0$

2.81. $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_0 = \sqrt{2}$

2.82. $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4}, \quad a_0 = 1$

2.1.2. Számsorok összege

Számítsuk ki a következő sorok összegét.

2.83. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

2.84. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^n, \qquad k \in \mathbb{R} \text{ } \textit{rögz.}$$

2.85. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}$$

2.86. $$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{5}{n^2-5n}$$

2.87. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$$

2.88. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3+3n^2+2n}$$

2.89. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{3^{2n}}$$

2.90. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

2.91. *Írjuk fel közönséges tört alakban az alábbi tizedes törteket:*

$$s = 1.7\ 972\ 972\ 972\ ... \qquad t = 0.78\ 123\ 123\ ...$$

Konvergensek-e az alábbi végtelen sorok?

2.92.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+1}$$

2.93.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.5^n}{n}$$

2.94.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

2.95.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n + 2}{n^2 + 1}$$

2.96.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{10n + 2}$$

2.97.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n(n + 1)}$$

2.98.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n+2} - 27}$$

2.99.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n + 2}$$

2.100.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2.101.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$$

2.102.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 1}$$

2.103.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{n}$$

2.104.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

2.105.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}$$

2.106.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

2.107.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$$

2.108.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}$$

2.109.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$$

2.110.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 4^n}$$

2.111.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}}$$

2.112.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

2.113.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

2.114.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2} \right)^2$$

2.115.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$$

2.116.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

2.117.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

2.118.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{(n+2)(2n+1)}$$

2.119.

$$\frac{1}{3} + \frac{2^3}{3^2} + \frac{3^3}{3^3} + \frac{4^3}{3^4} + \frac{5^3}{3^5} + \dots$$

2.120.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{2}}{k}$$

2.121.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$$

2.122.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad \textit{ahol} \qquad a_k = \begin{cases} -\dfrac{1}{k+2} & \textit{ha } k \textit{ páratlan} \\ \dfrac{1}{k} & \textit{ha } k \textit{ páros} \end{cases}$$

2.123.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(-2)^n(n^2-n+1)}.$$

2.124.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$

2.125.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

2.126.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{(2n+1)!}$$

2.1.3. Abszolút- ill. feltételes konvergencia

Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi végtelen sorok melyik típusba tartoznak: abszolút konvergens, feltételesen konvergens vagy divergens?

2.127.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n^2-2}$$

2.128.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3+1}$$

2.129.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n+2}$$

2.130.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}$$

2.131.

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

2.132.

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$$

2.133.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n}$$

2.134.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^2}$$

2.135.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

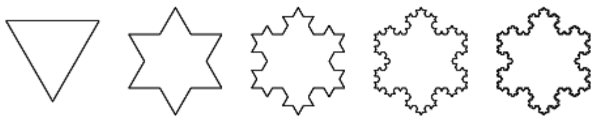
2.1.4. Alkalmazás: Geometriai feladatok

2.136. *Képezzünk sokszöget egy szabályos a oldalú, T területű háromszögből a következő rekurzív eljárással:*

1. *Osszunk minden oldalt* 3 *egyenlő részre.*

2. *Minden középső oldal szakaszra illesszünk szabályos háromszöget.*

3. *Ismételjük ezeket a lépéseket. Az így kapott sokszög az úgynevezett Koch-görbe. Mennyi a Koch görbe kerülete és területe?*



2.1. ábra. A Koch görbe konstrukciójának 1. - 5. lépése.

2.137. *Egységnyi területű szabályos háromszögbe beírjuk a középvonalai által alkotott háromszöget. Ezután vesszük az eredetivel egyállású részeket es azokba is beírjuk a középvonalai által alkotott háromszögeket. Ezt rekurzívan ismételjük. A kapott alakzat a SIERPINSKI háromszög.*

A középvonalak által alkotott háromszögek összterülete hányadik iteráció után haladja meg a 175/256 *értéket?*

Mennyi a középvonalak által alkotott háromszögek területeinek összege?

2.2. ábra. A Sierpienski háromszög konstrukciójának 1. - 5. lépése.

2.2. Megoldás. Számsorozatok

2.2.1. Számsorozat megadása, határértéke

2.1. Megoldás *A sorozat monoton növő (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról korlátos, felülről nem korlátos, tehát nem korlátos. Továbbá divergens, $+\infty$-be tart.* $a_n = n^2$.

2.2. Megoldás *A sorozat monoton fogyó, (sőt: szigorúan monoton fogyó). Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke:* 0. $a_n = \dfrac{n}{(n+1)^2}$.

2.3. Megoldás *A sorozat monoton növő (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról korlátos, felülről nem korlátos, tehát nem korlátos. Továbbá divergens, $+\infty$-be tart.* $a_n = -4 + 3n$.

2.4. Megoldás *A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke:* 0. $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{n}$.

2.5. Megoldás *A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá divergens, határértéke nincs.* $a_n = (-1)^n$.

2.6. Megoldás *A sorozat monoton növő, (sőt: szigorúan monoton növő). Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke:* 1. $a_n = 1 - 10^{-(n+1)}$.

2.7. Megoldás *A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá divergens, határértéke nincs.* $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{2n-1}{n}$.

2.8. Megoldás *A sorozat nem monoton. Alulról is és felülről is korlátos, tehát korlátos. Továbbá konvergens, határértéke:* 1.

Megjegyzés. A 2.8 feladatban szereplő (a_n) sorozat a $(b_n = 1)$ és a $\left(c_n = \dfrac{n+1}{n+2}\right)$ sorozatok "összefésülésével" keletkezett. Mivel páratlan n-ekre $a_n = 1$, páros n-ekre pedig

$$a_n = \frac{\frac{n}{2}+1}{\frac{n}{2}+2} = \frac{n+2}{n+4},$$

ezért olyan törtet kell készítenünk, melynek nevezője $n+4$, számlálója pedig páratlan n-re $n+4$, páros n-re pedig $n+2$. Könnyen kaphatunk ilyen számlálót: $n+3+(-1)^n$.

2.9.

2.10.

2.11.

2.12.

2.13.

2.14.

2.15. ∞.

2.16. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^8-9}{n^9+12n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{9}{n^8}}{n+\dfrac{12}{n^6}+\dfrac{5}{n^8}} = 0\,.$$

2.17. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-4}{5n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{1}{n}} = \frac{3}{5}\,.$$

2.18. 0.

2.19. ∞.

2.20. $\frac{3}{7}$.

2.21. $\frac{2}{3}$.

2.22. ∞.

2.23. $-\infty$.

2.24. 0.

2.25. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0\,.$$

2.26. $-\frac{1}{2}$.

2.27. $\frac{1}{2}$.

2.28. $\frac{1}{4}$.

2.29. 7.

2.30. 1.

2.31. 3.

2.32. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!((n+2)+1)}{(n+1)!(n+2)(n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n^2+5n+6}=0\,.$$

2.33. $-\frac{1}{2}$.

2.34. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(1+n)n}{2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{2}=\infty\,.$$

2.35. 2.

2.36. 9.

2.37. $\frac{1}{2}$.

2.38. 1.

2.39. $\frac{1}{3}$.

2.40. Megoldás *Teljes indukcióval belátható, hogy*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Ezért

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\,.$$

2.41. $\frac{1}{2}$.

2.42. 1.

2.43. 0.

2.44. 5.

2.45. 2.

2.46. $\frac{1}{9}$.

2.47. 1.

2.48. *Konvergens, $N = 760$.*

2.49. Megoldás $\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$, *továbbá*

$$\left|a_n - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{n-1}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2n-2-2n-1}{4n+2}\right| = \left|\frac{-3}{4n+2}\right| = \frac{3}{4n+2}\,.$$

Tehát olyan küszöböt kell találni, hogy a nála nagyobb n-ekre

$$\frac{3}{4n+2} < 10^{-5}$$

teljesüljön. Ezt az egyenlőtlenséget megoldva kapjuk, hogy $n > \frac{3\cdot 10^5 - 2}{4}$, tehát $N = 74999$ egy jó küszöbindex.

2.50. *Konvergens, $N = 13201$.*

2.51. *Konvergens, $N = 140$.*

2.52. *Ismert tétel alapján* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

Továbbá $|\sqrt[n]{2} - 1| = \sqrt[n]{2} - 1 < 10^{-1}$, azaz $\sqrt[n]{2} < 1.1$. Mindkét oldal 2-es alapú logaritmusát véve kapjuk, - a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt - hogy $\frac{1}{n} < \log_2 1.1$, amiből $n > \frac{1}{\log_2 1,1} \approx 7.272$. Ezért $N = 7$ egy jó küszöbindex.

2.53. *Konvergens, $N = 12$.*

2.54. *Konvergens,* $N = 700$.

2.55. *Konvergens,* $N = 200$.

2.56. *Konvergens,* $N = 222$.

2.57. *Mivel* $n^2 > 10^6 \iff n > 10^3$, *ezért* $N = 10^3$ *jó lesz küszöbindexnek.*

2.58. Megoldás *A törtet bővítve* $\dfrac{n-1}{\sqrt{n}+1} = \dfrac{(\sqrt{n}-1)\cdot(\sqrt{n}+1)}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{n}-1$, *így a vizsgálandó egyenlőtlenség:* $\sqrt{n}-1 > 6500$. *Ebből átrendezéssel kapjuk, hogy* $N = 6501^2$.

2.59. $N = 139$.

2.60. $N = 115$.

2.61. e^3.

2.62. e^{-2}.

2.63. Megoldás $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^2 = e^2$.

2.64. e^2.

2.65. $\dfrac{1}{e}$.

2.66. e.

2.67. e^2.

2.68. $\dfrac{1}{e^3}$.

2.69. e^2.

2.70. e^{-6}.

2.71. 0.

2.72. e^8.

2.73. 0.

2.74. 1.

2.75. e.

2.76. 0.

2.77. Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}(n+1)\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \infty\cdot\frac{1}{e} = \infty\,.$$

2.78. Megoldás *A számlálót az ismert összegképletek segítségével tudjuk zárt alakban felírni:*

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\,.$$

Ennek alapján

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(n+2)}{3n^3} = \frac{1}{3}\,.$$

2.79. Megoldás *Teljes indukcióval belátható, hogy a sorozat monoton növő, és felülről korlátos. Ebből következik, hogy konvergens, vagyis létezik a*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A$$

véges határérték. A sorozatot megadó rekurzív képlet mindkét oldalának határértékét véve kapjuk, hogy

$$A = \frac{1}{4} + A^2\,.$$

Ennek az egyenletnek egyetlen megoldása $A = \frac{1}{2}$. *Tehát* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}\,.$

2.80. 1.

2.81. 2.

2.82. 2.

2.2.2. Számsorok összege

2.83. *3.*

2.84. Megoldás *Mértani sorról van szó,* $q = \dfrac{k^2}{1+k^2} \in (-1,\, 1)$, *tehát konvergens. Összegzése az ismert képlet segítségével történik:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{k^2}{k^2+1}} = k^2+1$$

2.85. Megoldás *A sor* n*-edik részletösszege:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+3k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}.$$

Az összeg k*-adik tagját parciális törtekre bontjuk:*

$$\frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right).$$

Ezt behelyettesítjük, majd az összeget átrendezzük:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3}\right).$$

Ezután a második szumma indexét eltoljuk úgy, hogy a tagok $\dfrac{1}{k+3}$ *helyett* $\dfrac{1}{k}$ *alakúak legyenek:*

$$S_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}\right).$$

Végül - mindkét szummából leválasztva a megfelelő tagokat - a közös index tartományon vett összegek kiejtik egymást, s így kialakul S_n *zárt alakja:*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \qquad (n \geq 4)\,. \end{aligned}$$

Innen $n \to \infty$ *határátmenettel kapjuk a sor összegét:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) = \frac{11}{18}.$$

2.86. $\frac{137}{60}$.

2.87. $\frac{1}{2}$.

2.88. Megoldás *A sor n-edik részletösszege:*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

Az összeg k-adik tagját parciális törtekre bontjuk:

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

Ezt behelyettesítjük, majd az összeget a 2.85 feladatban látott módon átalakítjuk (átrendezés, index eltolás, leválasztás, kiejtés):

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k+1} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \xrightarrow{(n \to \infty)} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

A sor összege tehát $\frac{1}{4}$.

2.89. $\frac{81}{20}$.

2.90. 1.

2.91. $s = \frac{399}{222}$ *és* $t = \frac{5203}{6660}$.

2.92. *Divergens.*

2.93. Megoldás *Konvergens. Pozitív tagú sor, melyet a* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ *konvergens geometriai sor majorál.*

2.94. Megoldás *Mivel* $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \neq 0$*, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül, ezért a sor divergens.*

2.95. Megoldás *A sor divergens, ugyanis*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 \cdot n + 2}{n^2 + 1} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot n + 2}{(n+1)^2} = 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

a sort tehát a harmonikus sor minorálja, amely divergens.

2.96. *Divergens.*

2.97. *Konvergens.*

2.98. Megoldás *Divergens, mert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+2} - 27} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^2 - \frac{27}{3^n}} = \frac{1}{9} \neq 0,$$

s így a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

2.99. Megoldás *Konvergens. Pozitív tagú sor, melyet majorál a* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ *konvergens geometriai sor.*

2.100. *Divergens.*

2.101. *Divergens.*

2.102. *Divergens.*

2.103. *Divergens.*

2.104. *Konvergens.*

2.105. *Divergens.*

2.106. Megoldás *Alkalmazzuk a gyökkritériumot:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}} = \frac{1}{e} < 1,$$

ezért a vizsgált sor konvergens.

2.107. *Divergens.*

2.108. *Divergens.*

2.109. *Divergens.*

2.110. *Konvergens.*

2.111. Megoldás *Divergens. Ugyanis*

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{3}{n-2},$$

s így

$$\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n}{2} \Big/ \binom{n}{3} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3}{n-2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ez a harmonikus sor viszont divergens.

2.112. *Konvergens.*

2.113. *Konvergens.*

2.114. *Konvergens.*

2.115. *Konvergens.*

2.116. *Divergens.*

2.117. *Konvergens.*

2.118. *Konvergens.*

2.119. *Konvergens.*

2.120. *Konvergens.*

2.121. *Konvergens.*

2.122. Megoldás *A sor tagjai:*

$$a_{2k-1} = -\frac{1}{(2k-1)+2} = -\frac{1}{2k+1}, \qquad a_{2k} = \frac{1}{2k} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Jelölje a sor n-edik részletösszegét S_n. A páros indexű részletösszegek:

$$\begin{aligned} S_{2n} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2n-1} + a_{2n} = \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} + a_{2n}) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots, \end{aligned}$$

amiből látszik, hogy (S_{2n}) egy konvergens Leibniz-típusú sor részletösszegeinek sorozatával egyenlő. Ezért konvergens, jelöljük a határértékét S-sel. A páratlan indexű részletösszegek is S-hez tartanak, ugyanis

$$S_{2n-1} = S_{2n} - a_{2n} = S_{2n} - \frac{1}{2n} \xrightarrow{(n\to\infty)} S - 0 = S.$$

Ezért (S_n) konvergens, vagyis a vizsgált sor konvergens.

Megjegyzés. A fenti feladatban szereplő sor példa olyan esetre, amikor a sor csupán a monotonitás hiánya miatt nem Leibniz-típusú. Ennek ellenére konvergens.

2.2.3. Abszolút- ill. feltételes konvergencia

2.123. *Konvergens.*

2.124. *Konvergens.*

2.125. *Divergens.*

2.126. *Konvergens.*

2.127. *Feltételesen konvergens.*

2.128. *Abszolút konvergens.*

2.129. *Abszolút konvergens.*

2.130. *Feltételesen konvergens.*

2.131. Megoldás *Vizsgáljuk az (S_n) részletösszeg-sorozat páros indexű tagjait:*

$$S_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}} \right) =$$
$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{1-\sqrt{k}}{k} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{\sqrt{k}-1}{k}$$

Itt alkalmazhatjuk a minoráns kritériumot, ugyanis $k \geq 4$ esetén $\sqrt{k} - 1 \geq \frac{\sqrt{k}}{2}$, s ezt felhasználva

$$\frac{\sqrt{k}-1}{k} \geq \frac{\sqrt{k}}{2k} = \frac{1}{2\sqrt{k}},$$

továbbá tudjuk, hogy a $\sum \frac{1}{2\sqrt{k}}$ sor divergens. Ezért az (S_{2n}) részletösszeg-részsorozat divergens, amiből következik, hogy (S_n) is divergens. A vizsgált sor tehát divergens.

Megjegyzés. A feladatban szereplő sor példa olyan esetre, amikor a sor csupán a monotonitás hiánya miatt nem Leibniz-típusú, és nem is konvergens.

2.2.4. Alkalmazás: Geometriai feladatok

2.132. *Feltételesen konvergens.*

2.133. *Feltételesen konvergens.*

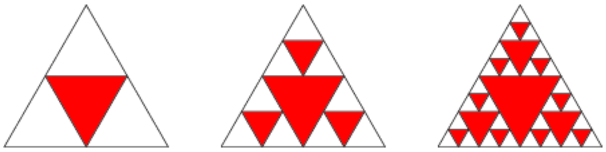
2.134. *Abszolút konvergens.*

2.135. *Feltételesen konvergens.*

2.136. *A feladat megoldása a jegyzet I. kötet 52. oldalán található.*

$$K_{Koch} = \infty, \quad T_{Koch} = \frac{2\sqrt{3}a^2}{5} = \frac{8T}{5}.$$

2.137. Megoldás *Mivel a középvonalak által meghatározott háromszög $\frac{1}{2}$-szeres kicsinyítése a háromszögnek, ezért területe $\frac{1}{4}$-szerese annak a háromszögének, amelybe beleírjuk.*



2.3. ábra. A Sierpienski háromszög konstrukciójának 1., 2. és 3. lépése.

Ennek alapján a középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) száma és összterülete az alábbi módon adható meg:

Az első ábrán 1 db $\frac{1}{4}$ *területű háromszög.*

A második ábrán 1 db $\frac{1}{4}$*, továbbá még 3 db* $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4^2}$ *területű háromszög.*

A harmadik ábrán ugyanaz, mint a második ábrán, továbbá még 3^2 *db* $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4^3}$ *területű háromszög.*

És így tovább, teljes indukcióval megmutatható, hogy az n-edik ábrán beszínezett háromszögek összterülete:

$$T_n = 3^0 \cdot \frac{1}{4^1} + 3^1 \cdot \frac{1}{4^2} + 3^2 \cdot \frac{1}{4^3} + \ldots + 3^{n-1} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k$$

A mértani sorozat első n tagjára vonatkozó képlettel kapjuk, hogy az n-edik ábrán beszínezett háromszögek összterülete:

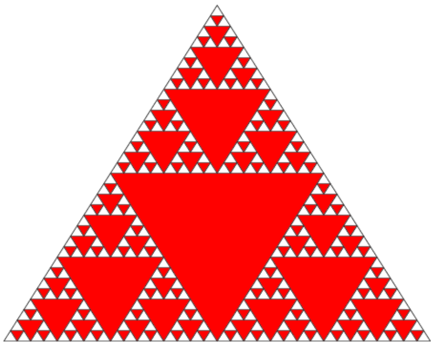
$$T_n = \frac{1}{4} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{\frac{3}{4} - 1} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n .$$

A kapott képlet alapján válaszolhatunk a feladat kérdéseire:

a) Megoldandó a $T_n > \frac{175}{256}$ *egyenlőtlenség, azaz:*

$$1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n > \frac{175}{256}; \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^n < 1 - \frac{175}{256} = \frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 .$$

Ebből adódik, hogy $n > 4$. Sőt az is látható, hogy $n = 4$ esetén egyenlőség van. Tehát a középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) összterülete a negyedik ábrán éppen $\frac{175}{256}$*, s ezt az értéket először az ötödik ábrán haladja meg.*



2.4. ábra. A beszínezett háromszögek összterülete elöször nagyobb, mint $\frac{175}{256}$.

b) A középvonalak által meghatározott háromszögek (beszínezett háromszögek) összterülete:

$$\lim T_n = \lim(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n) = 1,$$

ami megegyezik az eredeti háromszög területével. Megjegyzés. *A feladatot egyszerűbben is meg tudjuk oldani, ha nem a beszínezett, hanem a fehéren maradt háromszögek összterületét számoljuk. Ez a terület mindegyik ábrán – mint az könnyen látható –* $3/4$*-szerese az előző ábrán lévő fehér területnek. Tehát az* n*-edik ábrán lévő fehér terület:* $(3/4)^n$*. Ebből következik, hogy a beszínezett terület az* n*-edik ábrán* $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$*.*

3. fejezet

Valós függvények

3.1. Valós függvények

3.1.1. Bevezető feladatok

Mivel egyenlő?

3.1. $\sin\Big(\arcsin(x)\Big)$

3.2. $\sin\Big(\arccos(x)\Big)$

3.3. $\sin\Big(2\arccos(x)\Big)$

3.4. $\operatorname{tg}\Big(\arccos(x)\Big)$

3.5. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin(x)\right)$

3.6. $\sin\Big(\operatorname{arc}\operatorname{tg}(2,4)\Big)$

3.7. $\operatorname{sh}(2)$

3.8. $\operatorname{ch}(3)$

3.9. $\operatorname{ch}(2x), \quad ha \ \operatorname{sh}(x) = 1.$

3.10. $\operatorname{arsh}(4)$

3.11. $\operatorname{arch}(5)$

3.12. $\operatorname{arth}(-0,6)$

Határozzuk meg a következő függvények értelmezési tartományát:

3.13.

$$y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

3.14.

$$y = \sqrt{3-2x}$$

3.15.

$$y = \frac{2x-3}{x+2}$$

3.16.

$$y = \frac{x+1}{x^2-3x}$$

3.17.

$$y = \ln(x^2-3x+2)$$

3.18.

$$y = \sqrt{\ln\frac{5x-x^2}{4}}$$

3.19.

$$y = \arcsin\frac{3-2x}{5}$$

3.20.

$$y = 2\arccos\sqrt{9-x^2}$$

3.21.

$$y = \ln\frac{x^2-2x-15}{x^2-10x+16}$$

3.22.

$$y = \ln(\ln x)$$

Rajzoljuk meg a következő függvények görbéit.

3.23.

$$y = \frac{x}{x-1}$$

3.24.

$$y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$$

3.25.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

3.26.

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

3.27.

$$y = \frac{1}{1 - x^2}$$

3.28.

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

3.29.

$$y = \frac{x}{4 - x^2}$$

3.30.

$$y = \pm\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

3.31.

$$y = e^{-x^2}$$

3.32.

$$y = e^{\frac{1}{x}}$$

3.33.

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3.34.

$$y = \arcsin(\sin(x))$$

3.35.

$$y = \arccos(\cos(x))$$

3.36.

$$y = \arctan(\operatorname{tg}(x))$$

3.37.

$$y = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Határozzuk meg a következő függvények inverz függvényét.

3.38.

$$y = 1 - 2x$$

3.39.

$$y = 1 + x$$

3.40.

$$y = x^2 + 1 \quad (x \geq 0)$$

3.41.

$$y = \frac{1}{1 - x}$$

3.42.

$$y = \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad (x \geq 0)$$

3.43.

$$y = \sqrt{x^2 - 16} \quad (x \geq 0)$$

3.44.

$$y = \sqrt{3-x}$$

3.45.

$$y = \frac{2x+3}{x+1}$$

3.46.

$$y = \frac{x}{2} + \sqrt{\frac{x^2}{4} - 1} \quad (x \geq 2)$$

3.47.

$$y = \frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$$

3.1.2. Határérték

Határozzuk meg a következő függvények határértékét az adott pontban.

3.48.

$$\lim_{x\to 2}(x^3 - x^2 - x + 1)$$

3.49.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} \quad (k \in \mathbb{N} \textit{ rögzített})$$

3.50.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$$

3.51.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4}$$

3.52.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$

3.53.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2}$$

3.54.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4+3x^2}{x^5+x^3+2x^2}$$

3.55.

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$$

3.56.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$$

3.57.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$$

3.58.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\quad (n\in\mathbb{Z}\ \textit{rögzített})$$

3.59.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

3.60.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^3-1}\right)$$

3.61.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$$

3.62.

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$$

3.63.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$$

Határozzuk meg a következő függvények határértékét az adott pontban.

3.64.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}}$$

3.65.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[10]{x^7+1963}-\sqrt{x}}$$

3.66.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

3.67.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{9-2x+x^2}}{x^2-3x+2}$$

3.68.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

3.69.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

3.70.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

3.71.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

3.72.

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

3.73.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$$

3.74.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}$$

3.75.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$$

3.76.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$$

3.77.

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

3.78.

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{-x}}{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-x}}$$

3.79.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$$

Határozzuk meg a következő függvények határértékét az adott pontban.

3.80.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

3.81.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(mx)}{nx}, \quad n, m \in \mathbb{N} \textit{ rögzített.}$$

3.82.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \quad a, b \in \mathbb{R},\ b \neq 0 \textit{ rögzített.}$$

3.83.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(x)}$$

3.84.

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \operatorname{ctg}(x)$$

3.85.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

3.86.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

3.87.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$$

3.88.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin(x)}{x^3}$$

3.89.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin(x)-\cos(x)}{1-\sin(x)-\cos(x)}$$

3.90.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{\cos(x^3)}}{1-\cos(x)}$$

3.91.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}(2x)) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

3.92.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2(x)+\sin(x)-1}{2\sin^2(x)-3\sin(x)+1}$$

3.93.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin(3x)}$$

3.94.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))^2}{\operatorname{tg}^3 x-\sin^3(x)}$$

3.95.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}$$

3.96.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos(x)}$$

3.97.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos(x)}$$

3.98.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)}}{\sin(x)}$$

3.1.3. Függvény deriválás

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

3.99. $f(x)=4x^3-x^2+7$

3.100. $f(x)=(x^3-3)\sin(x)$

3.101. $f(x)=\dfrac{x^3+3}{(x^2+x+1)\cos(x)}$

3.102. $f(x)=\sin^2(x)$

3.103. $f(x) = \sin(x^2)$

3.104. $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 8)$

3.105. $f(x) = (x^4 - 6x + 1)^6 \cdot \operatorname{tg} \dfrac{1}{x}$

3.106. $f(x) = \dfrac{\cos(x^4)}{2 + \sin^3 x}$

3.107. $f(x) = \operatorname{tg}^2(x^2)$

3.108. $f(x) = \sin^3 (\dfrac{1 + x^2}{\operatorname{tg} 2x})$

3.109. $f(x) = 10^{\sin(x^3)}$

3.110. $f(x) = e^{-x^2}$

Határozzuk meg a következő függvények deriváltját.

3.111. $f(x) = \pi^{\sin(x)}$

3.112. $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

3.113. $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$

3.114. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

3.115. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{tg} 3x}{x^2 - 1}}$

3.116. $f(x) = \sqrt{\lg(1 + \sin^2(2x))}$

3.117. $f(x) = \operatorname{sh}[x^3 - \ln(x + 7)]$

3.118. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$

3.119. $f(x) = 2^{5 \arcsin x}$

3.120. $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$

3.121. $f(x) = \operatorname{ar}\ \operatorname{ch} \sqrt{x + 1}$

3.122. $f(x) = e^{\operatorname{ar}\ \operatorname{th} x^2}$

3.123. $f(x) = \sqrt[11]{2 - \sqrt[3]{x}}$

Határozzuk meg az alábbi implicit módon megadott ($y = f(x)$) függvények deriváltját.

3.124. $x^2 + y^2 = 1$

3.125. $\dfrac{\sin(x)}{\cos(y)} + \dfrac{\sin(y)}{\cos(x)} = 1$

3.126. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

3.127. $(x-1)\cos(y) + \cos(2y) = 0$

3.128. $y^x = x^y$

3.129. $f(x) = x + \operatorname{arc\,tg} f(x)$

3.130. $f(x) = (1+x)^{(1-x)}$

3.1.4. Taylor polinom

Írjuk fel az alábbi függvényeknek a megadott x_0 helyhez tartozó, megadott rendű Taylor polinomját.

3.131.

$$f(x) = \ln x, \quad x_0 = e, \quad T_4(x) = ?$$

3.132.

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 2, \quad T_4(x) = ?$$

3.133.

$$f(x) = \operatorname{tg}(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

3.134.

$$f(x) = \sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{4}, \quad T_3(x) = ?$$

3.135.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x), \quad x_0 = 1, \quad T_4(x) = ?$$

3.136.

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5, \quad x_0 = 2, \quad T_3(x) = ?$$

3.137.

$$f(x) = 2 + x^2 - 3x^5 + 7x^6, \quad x_0 = 1, \quad T_6(x) = ?$$

3.138.

$$f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x + 10, \quad x_0 = 1, \quad T_5(x) = ?$$

Írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ helyhez tartozó, megadott rendű Taylor polinomját.

3.139.

$$f(x) = e^{2x}, \quad T_4(x) =?$$

3.140.

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin(3x), \quad T_6(x) =?$$

3.141.

$$f(x) = \cos(2x), \quad T_5(x) =?$$

3.142.

$$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \quad T_3(x) =?$$

3.143.

$$f(x) = \ln(1+x), \quad T_n(x) =?$$

3.144.

$$f(x) = (1+x)^\alpha, \quad T_n(x) =?$$

3.145. *Mekkora hibát követünk el, ha az $y = \sin(x)$ függvény értékét a $[0, 1]$ intervallumon a*

$$T_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Taylor polinommal közelítjük?

3.146. *Határozzuk meg az e szám értékét két tizedesjegy pontossággal Taylor polinom segítségével!*

3.1.5. Határérték meghatározása L'Hospital szabállyal

3.147. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$

3.148. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - 1 + \cos 3x}{e^x - e^{-x}}$

3.149. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - 1}{\sin 4x}$

3.150. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)}$

3.151. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

3.152. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(x) - x}{x - \sin(x)}$

3.153. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

3.154. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$

3.155. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x) - xe^{\cos(x)}}{1 - \sin(x) - \cos(x)}$

3.156. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin(x)}$

3.157. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$

3.158. $\lim\limits_{x\to \infty} x \cdot \sin \dfrac{a}{x}$ *($a \in \mathbb{R}$ rögzített)*

3.159. $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$

3.160. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$

3.161. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \dfrac{1}{x}\right)$

3.162. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\operatorname{tg}(x)}$

3.163. $\lim\limits_{x\to 0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg}(x)}$

3.164. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}(x))^{2x-\pi}$

3.165. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}(x)}$

3.166.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$$

3.167.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$$

3.168.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$$

3.169.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x^4}$$

3.170.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$$

3.171.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}(x)\right)^{\operatorname{ctg} x}$$

3.1.6. Síkbeli görbe érintője

3.172. *Határozzuk meg az $y = 3x - x^2$ parabola $x_0 = 1$ abszcisszájú pontjához húzott érintőjének egyenletét!*

3.173. *Hol metszi az $y = \ln x$ görbe $x = e$ abszcisszájú pontjához húzott érintője az x tengelyt?*

3.174. *Határozzuk meg az $y = \operatorname{tg}(x)$ görbének azt a pontját, melyhez tartozó érintő párhuzamos az $y = 2x - 5$ egyenessel!*

3.175. *Határozzuk meg az $y = x^3 - 6x + 1526$ görbének azokat a pontjait, melyekben az érintő párhuzamos az $y = 6(x - \pi)$ egyenessel!*

3.176. *Bizonyítsuk be, hogy az* $xy = a^2$ *görbe (ahol* $a > 0$ *adott) bármely pontjához húzott érintője és a koordináta tengelyek által alkotott háromszög területe független az érintési ponttól!*

3.177. *Írjuk fel az* $y = \text{tg}\,(x)$ *görbe* $x = \frac{\pi}{4}$ *abszcisszájú pontjához tartozó normálisának egyenletét. (A függvény görbe P pontjához tartozó normálisa az az egyenes, amely a ponthoz húzott érintőre merőleges.)*

3.178. *Határozzuk meg az* $y^3 - 3x^2 - 4xy + 3 = 0$ *implicit alakban adott függvény görbéjének* $x = 1$ *abszcisszájú pontjaiban az érintő és normális egyenletet.*

3.179. *Keressük meg az* $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ *görbe azon pontjait, ahol*
a.) az érintő párhuzamos az x tengellyel
b.) az érintő az x tengely pozitív irányával $+45°$*-os szöget zár be.*

3.1.7. Szélsőérték számítás

3.180. *Határozzuk meg az* $y = x^3 - 12x$ *függvény lokális szélsőértékeit!*

3.181. *Határozzuk meg az* $y = x^4 e^{-x^2}$ *függvény lokális szélsőértékeit!*

3.182. *Keressük meg az* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$ *függvény*
a) lokális szélsőértékeit,
b) abszolút szélsőértékeit a $[0; 2]$ *és a* $(0; 2)$ *intervallumokon.*

3.183. *Keressük meg az* $f(x) = x + \frac{1}{x}$ *függvény*
a.) lokális szélsőértékeit
b.) abszolút szélsőértékeit az $[\frac{1}{2}; 2]$ *intervallumon.*

3.184. *Keressük meg az* $f(x) = x^2 \ln x$ *függvény*
a.) lokális szélsőértékeit
b.) abszolút szélsőértékeit az $(0; 1]$ *intervallumon.*

3.185. *Határozzuk meg az R sugarú körbe írt legnagyobb területű téglalapot.*

3.186. *Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú hengert.*

3.187. *Határozzuk meg az R sugarú gömbbe írt legnagyobb térfogatú kúpot.*

3.188. *Határozzuk meg az egy literes, felül nyitott legkisebb felszínű hengert.*

3.189. *Egyenlő szélességű három deszkából csatornát készítünk. Az oldalfalak milyen hajlásszöge mellett lesz a csatorna keresztmetszete maximális?*

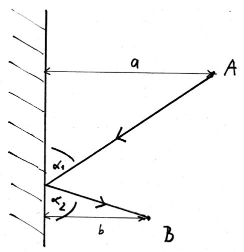
3.190. *Határozzuk meg a h alkotójú kúpot közül azt, melynek a térfogata legnagyobb.*

3.191. *Egy a szélességű csatornából derékszögben kinyúlik egy b szélességű csatorna. A csatornák falai egyenes vonalúak. Határozzuk meg azon gerenda legnagyobb hosszát, amely az egyik csatornából átcsúsztatható a másikba.*

3.192. *Keressük meg az* $y^2 = 8x$ *parabolának azt a pontját, amely a* $(6, 0)$ *ponttól a legkisebb távolságra van.*

3.193. *Feltsszük, hogy a gőzhajó energiafogyasztása a sebesség harmadik hatványával egyenesen arányos. Keressük meg a leggazdaságosabb óránkénti sebességet abban az esetben, ha a hajó c km/óra sebességű víz-sodrással szemben halad.*

3.194. *Az A és B pontok a ill. b távolságra vannak a faltól. Melyik a legrövidebb út A-ból B-be a falat érintve?*

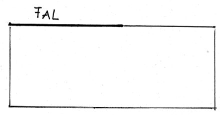


3.1. ábra.

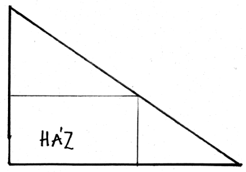
3.195. 200 *m hosszú drótkerítéssel szeretnénk maximális területet közrezárni, miközben csatlakozunk egy már meglevő* 100 *m hósszú kőfalhoz. Mekkorák lesznek a kert oldalai?*

3.196. *Keressük meg a* $4x^2+9y^2 = 36$ *ellipszisnek azt a pontját, ami a* $P(1, 0)$ *ponthoz legközelebb illetve legtávolabb van.*

3.197. *Egy derékszögű háromszög alakú telek egymásra merőleges oldalai*
100 *m és* 200 *m. Az ábra szerint ráépített téglalap alapú ház alapterülete mikor lesz maximális?*



3.2. ábra.



3.3. ábra. 3.197. feladat.

3.198. *Egy r sugarú félkörbe írható téglalapok közül melyik területe maximális? Melyik területe minimális?*

3.199. *Egy fapados repülőgépen 300 ülőhely van. Csak akkor indítják a járatot, ha legalább 200 ülőhely foglalt. Ha 200 utas van, akkor egy jegy ára 30e Ft, és minden egyes plusz utas esetén a jegyárak egységesen csökkennek* 100 *Ft-tal. Hány utas esetén lesz a légitársaság bevétele maximális illetve minimális?*

3.200. *Adott T területű téglalapok küzül melyik kerülete a minimális?*

3.201. *Egy x hosszú drótból levágunk egy darabot, négyzetet csinálunk belőle. A maradékot kör alakúra hajlítjuk. Mikor lesz a két alakzat össz-területe maximális?*

3.1.8. Függvényvizsgálat

3.202. *Vizsgáljuk és ábrázoljuk az $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ függvényt!*

Vizsgáljuk az alábbi függvényeket.

3.203. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 12$

3.204. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

3.205. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

3.206. $f(x) = e^{-x^2}$

3.207. $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

3.208. $f(x) = e^x \cos(x)$

3.2. Megoldások. Valós függvények

3.2.1. Bevezető feladatok

3.1. x

3.2. $\sqrt{1-x^2}$

3.3. $\sin(2\arccos x) = 2\sin(\arccos x)\cdot\cos(\arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

3.4. $\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

3.5. $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{2}}$

3.6. $\sin(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}, \qquad \sin(\operatorname{arc\,tg} 2.4) = \dfrac{12}{13}$

3.7. $\operatorname{sh}(2) = \dfrac{e^2-e^{-2}}{2} = 3.627$

3.8. $\operatorname{ch}(3) = 10.068$

3.9. $\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x = 3,$ *ha* $\operatorname{sh} x = 1.$

3.10. Megoldás $\operatorname{ar\,sh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),$ *ezért* $\operatorname{ar\,sh} 4 = \ln(4+\sqrt{17}) = 2.094$

3.11. Megoldás $\operatorname{ar\,ch} x = \ln(x\pm\sqrt{x^2 11}),$ *ezért*

$$\begin{aligned}\operatorname{ar\,ch} 5 = \ln(5\pm\sqrt{24}) &= \ln 9.8999 = 2.292\\ &= \ln 0.101 = -2.292\end{aligned}$$

3.12. Megoldás $\operatorname{ar\,th} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y},$ *ezért* $\operatorname{ar\,th}(-0.6) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{0.4}{1.6} = -0.693.$

3.13. Megoldás *A* $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ *kifejezés azokra az* x *értékekre van értelmezve, melyek esetén a négyzetgyökjel alatti kifejezések nem negatívak, azaz, ha* $1+x\geq 0$ *és* $1-x\geq 0$. *Ezt az egyenlőtlenség rendszert megoldva kapjuk, hogy az értelmezési tartomány:* $-1\leq x\leq 1$.

3.14. $x \leq \dfrac{3}{2}$

3.15. $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

3.16. $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 3\}$

3.17. Megoldás *A logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza. Ezért függvényünk pontosan az* $x^2 - 3x + 2 > 0$ *feltételnek eleget tevő valós számokra van értelmezve. Az egyenlőtlenséget megoldva azt nyerjük, hogy az értelmezési tartomány:* $x \in \mathbb{R} \setminus [1, 2]$

3.18. Megoldás *A logaritmus mögött pozitív számnak kell állnia, ezért* $\dfrac{5x - x^2}{4} > 0$. *Továbbá a gyökjel alatti számnak nem- negatívnak kell lennie, ezért* $\ln\left(\dfrac{5x - x^2}{4}\right) \geq 0$. *E két feltétel együttese pontosan akkor teljesül, ha* $\dfrac{5x - x^2}{4} \geq 1$. *Ezért:* $1 \leq x \leq 4$.

3.19. $-1 \leq x \leq 4.$

3.20. $-3 \leq x \leq -\sqrt{8}, \quad \sqrt{8} \leq x \leq 3.$

3.21. $-\infty < x < -3, \quad 2 < x < 5, \quad 8 < x < \infty.$

3.22. $1 < x < \infty.$

3.23.

3.24.

3.25.

3.26.

3.27.

3.28.

3.29.

3.30.

3.31.

3.32.

3.33.

3.34.

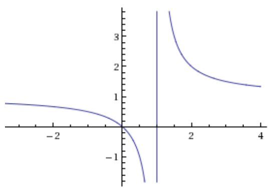
3.35.

3.36.

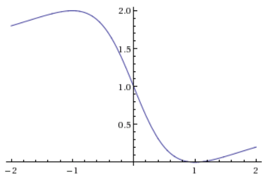
3.37.

Racionális törtfüggvényeknél az ábrázolás előtt határozzuk meg, hogy hol lesznek a görbének a koordináta tengelyekkel párhuzamos aszimptotái.

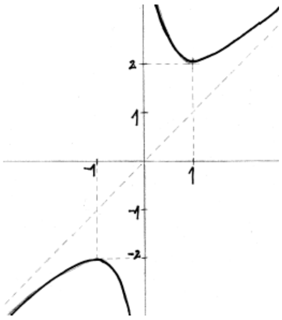
Ahol egy törtfüggvénynek a nevezője zérus, ott pólusa van. Itt függőleges aszimptotája van. A vízszintes aszimptota helyét a függvény végtelenben vett határértéke határozza meg.



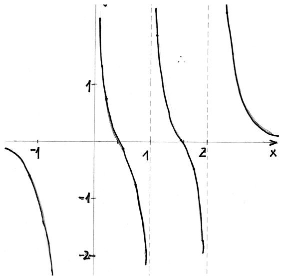
(a) 3.23. feladat



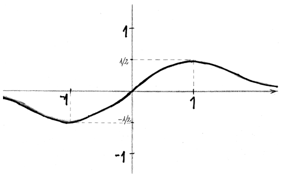
(b) 3.24. feladat



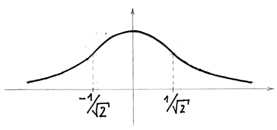
(c) 3.25. feladat



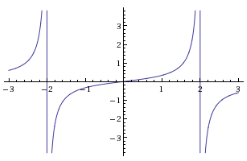
(d) 3.28. feladat



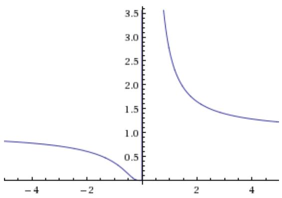
(e) 3.26. feladat



(f) 3.31. feladat

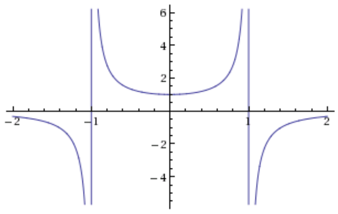


(g) 3.29. feladat

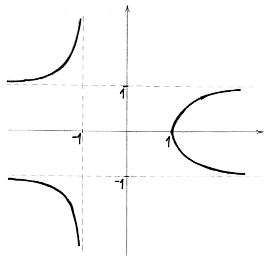


(h) 3.32. feladat

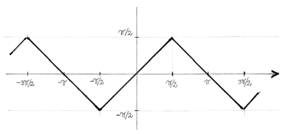
3.38. $$y = \frac{1-x}{2}.$$



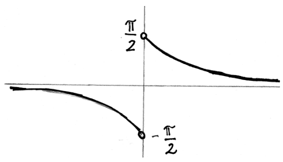
(i) 3.27. feladat



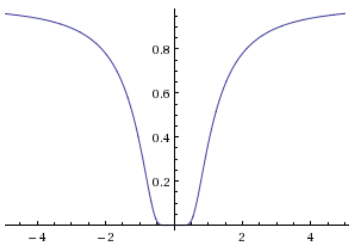
(j) 3.30. feladat



(k) 3.34. feladat



(l) 3.37. feladat



(m) 3.33. feladat

3.39. $y = x - 1.$

3.40. $y = \sqrt{x-1}$.

3.41. $y = \dfrac{x-1}{x}$.

3.42. $y = \sqrt{x^3-1}$.

3.43. $y = \sqrt{x^2+16}$.

3.44. $y = 3 - x^2$.

3.45. $y = \dfrac{3-x}{x-2}$.

3.46. $y = x + \dfrac{1}{x}$.

3.47. $y = -\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

3.2.2. Határérték

3.48. 3.

3.49. $+\infty$ *ha* k *páros, balról* $-\infty$, *jobbról* $+\infty$ *ha* k *páratlan.*

3.50. 0.

3.51. 3.

3.52. ∞.

3.53. Megoldás *Az* $(x-2)$ *gyöktényezőt a számlálóból és a nevezőből is kiemeljük, majd egyszerűsítünk:*

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x^2-x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+5)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}.$$

3.54. $\dfrac{3}{2}$.

3.55. $\dfrac{2}{3}$.

3.56. 6.

3.57. $0.$

3.58. $n.$

3.59. $-1.$

3.60. $\infty.$

3.61. Megoldás *Helyettesítsük* $\sqrt[3]{1+x}$*-et* u*-val. Ekkor* $\sqrt[3]{1+x}=u$ *és* $x=u^3-1$. *Ha* $x\to 0$*, akkor* $u\to 1$*, tehát*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2+u+1}=\frac{1}{3}.$$

3.62. Megoldás $x=u^{15}$ *helyettesítés alkalmazásával*

$$\lim_{x\to -1}\frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}=\lim_{u\to -1}\frac{1+u^5}{1+u^3}=\lim_{u\to -1}\frac{u^4-u^3+u^2-u+1}{u^2-u+1}=\frac{5}{3}.$$

3.63. $\dfrac{1}{n}.$

3.64. $1.$

3.65. Megoldás *Mivel* $x\to\infty$*, ezért a nevező domináns tagjával, azaz* $x^{\frac{7}{10}}$*-nel egyszerűsítjük a törtet:*

$$\frac{\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[10]{x^7}+1963-\sqrt{x}}=\frac{(x^2-6)^{\frac13}+x^{\frac13}}{x^{\frac{7}{10}}+1963-x^{\frac12}}=\frac{\dfrac{(x^2-6)^{\frac13}}{x^{\frac{7}{10}}}+x^{\frac13-\frac{7}{10}}}{1+\frac{1963}{x^{\frac{7}{10}}}-x^{\frac12-\frac{7}{10}}}=$$

$$=\frac{\left(\dfrac{x^2-6}{x^{2,1}}\right)^{\frac{10}{30}}+x^{-\frac{11}{30}}}{1+1963\cdot x^{-\frac{7}{10}}-x^{-\frac15}}=\frac{\left(\dfrac{1}{x^{0,1}}-\dfrac{1}{x^{2,1}}\right)^{\frac{10}{30}}+x^{-\frac{11}{30}}}{1+1963\cdot x^{-\frac{7}{10}}-x^{-\frac15}}\xrightarrow{(x\to\infty)}0$$

3.66. Megoldás *A számlálót és a nevezőt egyaránt szorozva* $\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)$*-el, a kifejezés értéke nem változik. Viszont a számlálóból eltűnik a négyzetgyök jel, és ezt követően a kifejezés egyszerűsíthető* x*-el. Így az ismert* $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ *összefüggést használtuk ki.*

Négyzetgyökös kifejezések esetén hasonlóan szoktunk eljárni máskor is.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{1+x+x^2}+1}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2-1}{x\left(\sqrt{1+x+x^2}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x}{\sqrt{1+x+x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

3.67. $\frac{1}{2}$.

3.68. Megoldás

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4-x)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(x^2+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+x+1)(\sqrt{x}+1)}{x^2+\sqrt{x}}=3.$$

Ebben a példában ugyanaz a kifejezés volt a négyzetgyökjel alatt mind a két helyen, tehát az előzőekben említett példa módjára úgy is eljárhattunk volna, hogy $x=u^2$ helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Az itt bemutatott módszer azonban általánosabb esetben is alkalmazható.

3.69. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1-x^2)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})\cdot(1+x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1\cdot 2}{2}=1.$$

3.70. 0.

3.71. 0.

3.72. $\frac{1}{2}$.

3.73. 4.

3.74. Megoldás *Alkalmazzuk az $u=\sqrt[3]{x^2+1}\to 1$ helyettesítést. Ekkor $x^2=u^3-1$, s ezzel*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x^2+1}-1}{x^2}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^3-1}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{(u-1)\cdot(u^2+u+1)}=\lim_{u\to 1}\frac{1}{u^2+u+1}=\frac{1}{3}.$$

3.75. $\frac{1}{2}$.

3.76. $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

3.77. $\frac{1}{4}$.

3.78. $\frac{3}{2}$.

3.79. $\frac{5}{3}$.

3.80. 5.

3.81. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{nx}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{mx}\right)\cdot\frac{mx}{nx}=1\cdot\frac{m}{n}=\frac{m}{n}.$$

3.82. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax\cdot\frac{\sin ax}{ax}}{bx\cdot\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}=\frac{a}{b}.$$

3.83. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}=\lim_{x\to 0}(\cos(x))\cdot\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}=1\cdot\frac{2}{1}=2.$$

3.84. 1.

3.85. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\cdot(1+\cos(x))}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x^2\cdot(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos(x)}=\frac{1}{2}.$$

3.86. $\frac{1}{2}$.

3.87. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{1}{\operatorname{tg}(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)}-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot x\cdot\frac{x}{\sin(x)}=\frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1=0.$$

3.88. $\frac{1}{2}$.

3.89. -1.

3.90. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos(x^3)}}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x^3)}{(1-\cos(x))\cdot(1+\sqrt{\cos(x^3)})}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1-\cos(x^3)}{(x^3)^2}}{\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}}\cdot x^4\cdot\frac{1}{1+\sqrt{\cos(x^3)}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\cdot 0\cdot\frac{1}{2}=0.$$

3.91. $\frac{1}{2}$

3.92. -3.

3.93. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin(2x)}{x+\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2x}{x+\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\dfrac{\sin(2x)}{2x}\cdot 2}{1+\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\frac{1-1\cdot 2}{1+1\cdot 3}=-\frac{1}{4}.$$

3.94. ∞

3.95. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-\sin(2x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin(x)-2\sin(x)\cos(x)}{x^3}=$$

$$\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{1-\cos(x)}{x^2}=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1.$$

3.96. 2.

3.97. Megoldás

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\dfrac{x}{2}-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{2}}=\frac{1}{\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}}=1.$$

3.98. 1.

3.2.3. Függvény deriválás

3.99. $f'(x) = 12x^2 - 2x.$

3.100. $f'(x) = 3x^2 \cdot \sin(x) + (x^3 - 3) \cdot \cos(x).$

3.101. $$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+x+1)\cos(x) - (x^3+3)[(2x+1)\cos(x) - (x^2+x+1)\sin(x)]}{(x^2+x+1)^2\cos^2(x)}.$$

3.102. $f(x) = \sin(x) \cdot \sin(x)$ *tehát*

$$f'(x) = \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x) \cdot \cos(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

3.103. $f'(x) = \cos(x^2) \cdot 2x.$

3.104. $f'(x) = (2x-5)\cos(x^2 - 5x + 8).$

3.105. $$f'(x) = 6(x^4 - 6x + 1)^5 \cdot (4x^3 - 6)\mathrm{tg}\,\frac{1}{x} - \frac{(x^4 - 6x + 1)^6}{x^2 \cos^2 \frac{1}{x}}.$$

3.106. $$f'(x) = \frac{-4x^3 \sin(x^4) \cdot (2 + \sin^3 x) - 3\cos(x^4)\sin^2(x) \cdot \cos(x)}{(2 + \sin^3(x))^2}.$$

3.107. $$f'(x) = \frac{2\mathrm{tg}\,(x^2)}{\cos^2(x^2)} \cdot 2x = \frac{4x\mathrm{tg}\,(x^2)}{\cos^2(x^2)}.$$

3.108. $$f'(x) = 3\sin^2(\frac{1+x^2}{\mathrm{tg}\,2x}) \cdot \cos(\frac{1+x^2}{\mathrm{tg}\,2x}) \cdot \frac{2(x\mathrm{tg}\,2x - \frac{1+x^2}{\cos^2 2x})}{\mathrm{tg}^{\,2} 2x}.$$

3.109. $f'(x) = 10^{\sin(x^3)} \cdot \ln 10 \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3(\ln 10)x^2 \cdot 10^{\sin(x^3)} \cdot \cos(x^3).$

3.110. $f'(x) = -2xe^{-x^2}.$

3.111. $f'(x) = \pi^{\sin(x)} \ln \pi \cdot \cos(x).$

3.112. $f(x) = x^{\frac{7}{8}}$ *tehát* $f'(x) = \dfrac{7}{8}x^{-\frac{1}{8}}.$

3.113. $$f'(x) = \frac{x\cos(x^2)}{\sqrt{\sin(x^2)}}.$$

3.114. $$f'(x) = -\frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

3.115. $$f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-1}{1+\operatorname{tg}3x}} \cdot \frac{\frac{3}{\cos^2 3x}\cdot(x^2-1) - 2x(1+\operatorname{tg}3x)}{(x^2-1)^2}.$$

3.116. Megoldás

$$f'(x) = \frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{2\sqrt{\lg(1+\sin^2 2x)}\cdot\ln(10)}\cdot(1+\sin^2 2x) =$$
$$= \frac{\sin 4x}{\sqrt{\lg(1+\sin^2 2x)}\cdot\ln(10)}\cdot(1+\sin^2 2x).$$

3.117. $$f'(x) = \operatorname{ch}[x^3 - \ln(x+7)]\cdot(3x^2 - \frac{1}{x+7}).$$

3.118. $$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x}.$$

3.119. $$f'(x) = \frac{5\cdot 2^{5\arcsin x}\cdot\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.120. $$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3.121. $$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{x+1})^2-1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

3.122. Megoldás *Mivel* $\operatorname{ar\ th}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, *ezért*

$$e^{\operatorname{ar\ th}x^2} = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}} = e^{\ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{(1+x^2)(1-x^2)^3}}$$

3.123. $$f'(x) = \frac{1}{11}\frac{1}{(\sqrt[11]{2-\sqrt[3]{x}})^{10}}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2}.$$

3.124. Megoldás *Deriváljuk mindkét oldalt:* $2x + 2yy' = 0$, *innen:* $y' = -\frac{x}{y}$.

3.125. Megoldás *Deriváljuk mindkét oldalt:*

$$\frac{\cos(x)\ \cos(y) + y'\sin(x)\ \sin(y)}{\cos^2(y)} + \frac{y'\cos(x)\ \cos(y) + \sin(x)\ \sin(y)}{\cos^2(x)} = 0.$$

Innen:

$$y' = -\frac{\dfrac{\cos(x)}{\cos(y)} + \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(x)}}{\dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\cos^2(y)} + \dfrac{\cos(x)\cos(y)}{\cos^2(x)}}.$$

3.126. Megoldás *Deriváljuk mindkét oldalt:*

$$3x^2 + 3y^2y' - (3ay + 3axy') = 0.$$

Innen átrendezéssel: $y' = \dfrac{a \cdot y - x^2}{y^2 - ax}$.

3.127. $\quad y' = \dfrac{\cos y}{2\sin 2y + (x-1)\sin y}$

3.128. Megoldás *Vegyük mindkét oldal logaritmusát:* $x \ln f(x) = f(x) \ln x$.

Deriváljuk mindkét oldalt: $\ln f(x) + \dfrac{x}{f(x)} f'(x) = f'(x) \ln x + \dfrac{f(x)}{x}$.

Innen azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{f(x)^2 - xf(x)\ln f(x)}{x^2 - xf(x)\ln x}.$$

3.129. Megoldás $\quad f'(x) = 1 + \dfrac{1}{f(x)^2}$.

3.130. Megoldás *Mindkét oldalnak a logaritmusát vesszük:* $\ln f(x) = (1-x)\ln(1+x)$. *Aztán – mint implicit függvényt – deriváljuk:*

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = -\ln(1+x) + \frac{1-x}{1+x}.$$

Innen átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$f'(x) = (1+x)^{1-x} \cdot (\frac{1-x}{1+x} - \ln(1+x)).$$

3.2.4. Taylor polinomok

3.131. Megoldás *A Taylor polinom képlete szerint:*

$$T_4(x) = f(e) + \frac{f'(e)}{1!}(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2 + \frac{f'''(e)}{3!}(x-e)^3 + \frac{f^{(4)}(e)}{4!}(x-e)^4.$$

A fenti képletbeli számítások: $f(e) = \ln e = 1$. *A derivált*

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \qquad f'(e) = \frac{1}{e}.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f''(e) = -\frac{1}{e^2},$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f'''(e) = \frac{2}{e^3},$$
$$f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \qquad f^{(4)}(e) = -\frac{6}{e^4}.$$

Így a keresett polinom:

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{e}(x-e) - \frac{1}{2e^2}(x-e)^2 + \frac{1}{3e^3}(x-e)^3 - \frac{1}{4e^4}(x-e)^4.$$

3.132.

$$T_4(x) = e^2[1 + \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \frac{1}{4!}(x-2)^4].$$

3.133.

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{4}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 + \frac{16}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3.$$

3.134. Megoldás $f(x) = \sin(x), \qquad f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$f'(x) = \cos(x), \qquad f'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f''(x) = -\sin(x), \qquad f''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f'''(x) = -\cos(x), \qquad f'''(\frac{\pi}{4}) = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{1!}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2!}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{1}{3!}(x - \frac{\pi}{4})^3\right]$$

3.135. Megoldás

$$2 \cdot T_4(x) = \sin(3) + \frac{3\cos(3)}{1!}(x-1) - \frac{3^2\sin(3)}{2!}(x-1)^2 -$$
$$\frac{3^3\cos(3)}{3!}(x-1)^3 + \frac{3^4\sin(3)}{4!}(x-1)^4.$$

3.136. Megoldás $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 5, \qquad f(2) = 1.$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11, \qquad f'(2) = -1$

$f''(x) = 6x - 12, \qquad f''(2) = 0$

$f'''(x) = 6, \qquad f'''(2) = 6\,.$

Tehát a keresett polinom:

$$\begin{aligned} T_3(x) &= f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 = \\ &= 1 - \frac{1}{1!}(x-2) + \frac{6}{3!}(x-2)^3 = (x-2)^3 - (x-2) + 1. \end{aligned}$$

Megjegyzés: *Mivel az n-ed fokú polinom megegyezik bármely helyen felírt n-edfokú Taylor polinomjával, ezért*

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1\,.$$

Természetesen ez az azonosság elemi úton is ellenőrizhető.

3.137. Megoldás

$$\begin{aligned} T(x) &= 7 + 29(x-1) + 76(x-1)^2 + 110(x-1)^3 + 90(x-1)^4 + \\ &+ 39(x-1)^5 + 7(x-1)^6. \end{aligned}$$

3.138. Megoldás $T_5(x) = 6 + 5(x-1) + (x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 4(x-1)^4 + (x-1)^5.$

3.139. Megoldás $T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4.$

3.140. Megoldás $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 3x, \qquad f(0) = 0.$

$f'(x) = \dfrac{3}{2}\cos 3x, \qquad f'(0) = \dfrac{3}{2}$

$f''(x) = -\dfrac{3^2}{2}\sin 3x, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\dfrac{3^3}{2}\cos 3x, \qquad f'''(0) = -\dfrac{3^3}{2}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{3^4}{2}\sin 3x, \qquad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \dfrac{3^5}{2}\cos 3x, \qquad f^{(5)}(0) = \dfrac{3^5}{2}$

$f^{(6)}(x) = -\dfrac{3^6}{2}\sin 3x, \qquad f^{(6)}(0) = 0.$

Tehát a keresett polinom:

$$T_6(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 =$$
$$= 0 + \frac{\frac{3}{2}}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{-\frac{3^3}{2}}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{\frac{3^5}{2}}{5!}x^5 + \frac{0}{6!}x^6 =$$
$$= \frac{1}{2}[3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5].$$

3.141. $\quad T_5(x) = T_4(x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4.$

3.142. Megoldás $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x, \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}, \qquad f'''(0) = -2.$

Tehát a keresett polinom:

$$T_3(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}.$$

3.143.

$$T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

3.144. Megoldás

$$\begin{aligned} T_n(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \\ &+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n = \\ &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k. \end{aligned}$$

3.145. Megoldás *A felírt polinom hatod fokúnak is tekinthető, ezért az elkövetett hiba*

$$|R_6(x)| = \left|\frac{f^7(\xi)}{7!}x^7\right| = \frac{|-\cos(\xi)|x|^7|}{5040} < \frac{1}{5040} < \frac{1}{5000} < 5\cdot 10^{-3},$$

mert $|-\cos(\xi)| \leq 1$ *bármilyen* ξ *esetén, és a* $0 \leq x \leq 1$ *feltevés miatt* $|x| \leq 1$. *Ha tehát a* 0*-tól* 1 *radiánig* ($\approx 57,3°$) *terjedő szögek sinusát az előbbi ötödfokú polinommal számítjuk ki, akkor a hiba* 2 *tízezrednél kisebb.*

3.146. Megoldás *Az e szám két tizedes jegy pontossággal való megközelítése azt jelenti, hogy megkeressük a két tizedes jeggyel felírt tizedes törtek halmazából azt az elemet, amely az e számhoz legközelebb esik. Ez a halmaz:* $\{k \cdot 0.01 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. *Mivel két ilyen szomszédos tizedes tört távolsága* $0,01$, *ezért célszerűnek tűnik, hogy az e számot először* $\frac{1}{2} \cdot 0.01 = 5 \cdot 10^{-3}$ *pontossággal közelítsük meg racionális számmal, majd ebből próbáljuk meg kikövetkeztetni, hogy az említett "százados" skálán melyik elem esik hozzá legközelebb.*

Az e számot az $f(x) = e^x \quad (x \in \mathbb{R})$ *függvény* $x = 1$ *helyen vett helyettesítési értéke adja. Ezért a feladat most olyan* $n \in \mathbb{N}$ *keresése, melyre*

$$|e - T_n(1)| = |f(1) - T_n(1)| < 5 \cdot 10^{-3}.$$

A Taylor-formulát $x = 1$ *esetén alkalmazva kapjuk, hogy van olyan* $0 < \xi < 1$ *szám, melyre*

$$f(1) - T_n(1) = f(1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} > 0.$$

A $\xi < 1$, $e < 3$ *becsléseket alkalmazva kapjuk, hogy*

$$0 < f(1) - T_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}, \tag{3.1}$$

ezért elég megoldani a

$$\frac{3}{(n+1)!} < 5 \cdot 10^{-3}$$

egyenlőtlenséget. Ez az egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$(n+1)! > 600,$$

amiből kiolvasható, hogy $n \geq 5$. *Nézzük tehát pl. az* $n = 5$ *esetet:*

$$T_5(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{8,15}{3} = 2,716666\ldots$$

Rendezzük át az (3.1) *becslést:*

$$T_n(1) < f(1) < T_n(1) + \frac{3}{(n+1)!},$$

majd alkalmazzuk $n = 5$*-re:*

$$2,716666\cdots < e < 2,716666\cdots + \frac{3}{6!} = 2,72083333\ldots$$

Ebből már látható, hogy a "százados" skálán az e számhoz a $2,72$ *tizedes tört esik legközelebb, tehát az e szám két tizedes jeggyel felírt közelítő értéke:* $2,72$.

3.2.5. Határérték meghatározása L'Hospital szabállyal

3.147. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ \cos 3x}{\frac{5}{\cos^2 5x}}=\lim_{x\to 0}\frac{3}{5}\ \cos 3x\ \cos^2 5x=\ \frac{3}{5}.$$

3.148. $\frac{1}{2}$.

3.149. $-\frac{1}{2}$.

3.150. 1.

3.151. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos(x)}=2.$$

3.152. 2.

3.153. 1.

3.154. 0.

3.155. $e-1$.

3.156. Megoldás

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x\ \cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\cos(x)\ \ -x\sin(x)}=1.$$

3.157. 0.

3.158. Megoldás

$$\lim_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{a}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(-\frac{a}{x^2}\right)\cdot\cos\frac{a}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}a\cdot\cos\frac{a}{x}=a\cdot\cos 0=a$$

3.159. 1.

3.160. $-\frac{1}{3}$.

3.161. 0.

3.162. Megoldás

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\mathrm{tg}\,(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} e^{(\mathrm{tg}\,(x))\cdot(\ln\sin(x))} = e^0 = 1.$$

Itt felhasználtuk, hogy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}\,(x))\cdot(\ln\sin(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin(x)}{\mathrm{ctg}\,x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{\sin^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(-\sin(x)\cos(x)) = 0\,.$$

3.163. 1.

3.164. 1.

3.165. 1.

3.166. e^2.

3.167. $\frac{1}{e}$.

3.168. ∞.

3.169. ∞.

3.170. 1.

3.171. e.

3.2.6. Síkgörbe érintője

3.172. Megoldás *Az érintő egyenlete* $y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$.
Példánkban $x_0 = 1$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$.
Az érintő egyenlete $y = (x-1) + 2$ *azaz* $y = x + 1$.

3.173. Megoldás *Az érintő egyenlete* $y = \frac{1}{e}x$ *Az* x *tengelyt ott metszi, ahol* $y = 0$. *Ebből* $x = 0$.
Az érintő az origón megy keresztül.

3.174. Megoldás *Az érintő iránytangense* y' *megegyezik az egyenes meredekségével.* $y' = \frac{1}{\cos^2 x} = 2.$

Innen $\cos(x) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

Tehát a keresett pontok: $P_k(\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ 1),\quad Q_k(-\dfrac{\pi}{4} + k\pi;\ -1)\quad (k \in \mathbb{Z}).$

3.175. $P_1(-2, 1530)$; $P_2(2, 1522)$.

3.176. $T_\triangle = 2a.$

3.177. Megoldás *A normális meredeksége* $m = -\frac{1}{y'(\frac{\pi}{4})} = -\cos^2\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{1}{2}.$ *Innen az érintő egyenlete:*

$$y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}\,.$$

3.178. Megoldás *Keressük meg először a jelzett pontokat. Az* $x = 1$ *értéket beírjuk a függvénybe:* $y^3 - 3 - 4y + 3 = 0.$ *Innen* $y(y^2 - 4) = 0.$

Három értéket találunk: $y_1 = 0,\ y_2 = 2,\ y_3 = -2,$ *ezért a megfelelő pontok*

$$P_1(1, 0),\ P_2(1, 2),\ P_3(1, -2).$$

A derivált

$$y' = -\frac{-6x - 4y}{3y^2 - 4x} = \frac{6x + 4y}{3y^2 - 4x},\qquad y'(P_1) = -\frac{3}{2},\qquad y'(P_2) = \frac{7}{4},\qquad y'(P_3) = -\frac{1}{4}.$$

Érintő egyenesek:

$$y = -\frac{3}{2}(x - 1),\quad y - 2 = \frac{7}{4}(x - 1),\quad y + 2 = -\frac{1}{4}(x - 1).$$

Normális egyenesek:

$$y = \frac{2}{3}(x - 1),\quad y - 2 = -\frac{4}{7}(x - 1),\quad y + 2 = 4(x - 1).$$

3.179. Megoldás $y' = x^2 - 2x$, *ezt felhasználva:*

a) $x^2 - 2x = 0$, *amiből* $x = 0$ *vagy* $x = 2$. *A keresett pontok:* $P_1(0,\ 1),\ P_2(2,\ -\dfrac{1}{3}).$

b) $+45°$*-os bezárt szög esetén az érintő meredeksége* 1,
ezért megoldandó az $x^2 - 2x = 1$ *egyenlet. Ennek gyökei* $x_1 = 1 + \sqrt{2},\ x_2 = 1 - \sqrt{2}.$
Tehát a keresett pontok: $Q_1(1 + \sqrt{2},\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}),\ Q_2(1 - \sqrt{2},\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}).$

3.2.7. Szélsőérték számítás

3.180. Megoldás *A függvénynek lokális szélsőértéke ott lehet, ahol az első derivált zérus. Ha ezen a helyen az első el nem tűnő derivált páros rendű, akkor van lokális szélsőérték. Ha ez a derivált az adott pontban pozitív, akkor lokális minimum van, ha negatív, akkor lokális maximum van.*

$y = x^3 - 12x$, *ezért* $y' = 3x^2 - 12$ *és* $y'' = 6x$.

$y' = 0$ *ha* $x^2 = 4$, *azaz* $x = \pm 2$

$y''(2) = 12 > 0$, *lokális minimum van* $y(2) = -16$.

$y''(-2) = -12 < 0$, *lokális maximum van* $y(-2) = 16$.

3.181. Megoldás $y' = (4x^3 - 2x^5)e^{-x^2} = x^3(4 - 2x^2)e^{-x^2}$

Mivel e^{-x^2} *mindenütt pozitív,* $y' = 0$ *akkor lehet, ha* $x_1 = 0$ *ill.* $x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = -\sqrt{2}$

$y'' = (12x^2 - 18x^4 + 4x^6)e^{-x^2}$

$y''(0) = 0$, *tehát ezt a helyet tovább kell vizsgálni.*

$y''(\sqrt{2}) = y''(-\sqrt{2}) = -\dfrac{16}{e^2} < 0$, *tehát ezeken a helyeken a függvénynek lokális maximuma van.*

Vizsgáljuk az $x = 0$ *helyet.*

$y''' = (24x - 96x^3 + 60x^5 - 8x^7)e^{-x^2}$; $y'''(0) = 0$

$y^{(IV)} = (24 - 336x^2 + 492x^4 - 176x^6 + 16x^8)e^{-x^2}$

$y^{(IV)}(0) = 24 > 0$, *tehát a függvénynek az* $x = 0$ *helyen van lokális szélsőértéke: lokális minimuma van.*

$x_1 = 0$*-nál* $y_{min} = 0$

$x_2 = \sqrt{2}$ *és* $x_3 = -\sqrt{2}$*-nél* $y_{max} = \dfrac{4}{e^2}$.

M*egjegyzés: természetesen kereshetjük a lokális szélsőérték helyeket a függvény monotonitásának vizsgálatával is.*

3.182. Megoldás *a)* f *monotonitását vizsgáljuk, s ebből következtetünk a keresett szélsőérték helyekre. A derivált* $f'(x) = 3x^2 - 18x + 15$, *melynek zérushelyei:* $x_1 = 1$, $x_2 = 5$. *Ennek alapján a függvény monotonitása:*

– *a* $(-\infty, 1]$ *intervallumon: szigorúan nő,*
– *a* $[1, 5]$ *intervallumon szigorúan csökken,*
– *a* $[5, +\infty]$ *intervallumon. szigorúan nő.*

Emiatt az $x = 1$ *helyen lokális maximuma van, melynek értéke:* 4, *és az* $x = 5$ *helyen lokális minimuma van, melynek értéke:* -28.

b) A $[0, 2]$ *intervallumon vegyük figyelembe, hogy* f *a* $[0, 1]$ *intervallumon szigorúan nő, az* $[1, 2]$ *intervallumon pedig szigorúan csökken. Emiatt abszolút maximuma az* $x = 1$ *helyen felvett* $f(1) = 4$, *abszolút minimuma pedig* $\min\{f(0); f(2)\} = f(0) = -3$.

A $(0, 2)$ *nyílt intervallumon - a monotonitás alapján - az* $x = 1$ *helyen van abszolút maximum, abszolút minimum pedig nincs.*

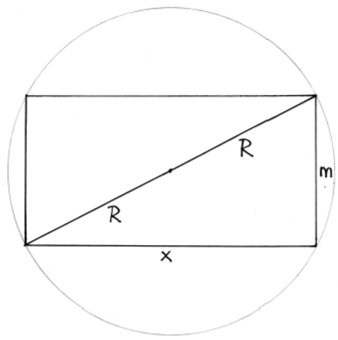
3.183. Megoldás *Lokális szélsőértékek:* $f(x)_{max} = -2$, *ha* $x = -1$ *és* $f(x)_{min} = 2$, *ha* $x = 1$.

Abszolút szélsőértékek $[\frac{1}{2}; 2]$*-n: abszolút minimum* $x = 1$*-nél* 2*, abszolút maximum* $x = \frac{1}{2}$*-nél és* $x = 2$*-nél* $\frac{5}{2}$.

3.184. Megoldás *Lokális szélsőérték:* $f(x)_{min} = -\frac{1}{2e}$, *ha* $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Abszolút szélsőérték $(0; 1]$*-en: abszolút minimum* $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$*-nél* $-\frac{1}{2e}$*, abszolút maximum* $x = 1$*-nél* 0.

3.185. Megoldás *Jelöljük a négyszög alapját* x*-el, magasságát* m*-el, akkor a terület* $T = x \cdot m$. *Ekkor* $x^2 + m^2 = 4R^2$, *ahonnan* $m = \sqrt{4R^2 - x^2}$.*Így* $T = x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}$.



3.4. ábra. 3.185 feladat

A kapott függvény maximumát kell keresnünk. Egyszerűsítést jelenthet, ha a területfüggvény helyett annak négyzetét tekintjük. T^2*-nek ugyanott van maximuma, ahol* T*-nek:*

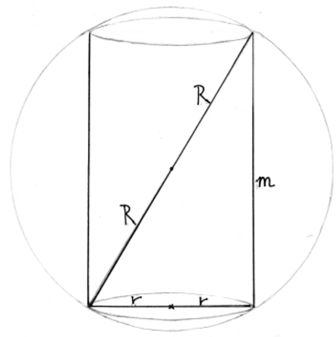
$$T^2 = x^2(4R^2 - x^2).$$

A maximális területű négyszög négyzet, és $x = m = \sqrt{2}R$. $T = 2R^2$.

3.186. Megoldás *Legyen a henger sugara* r*, magassága* m.

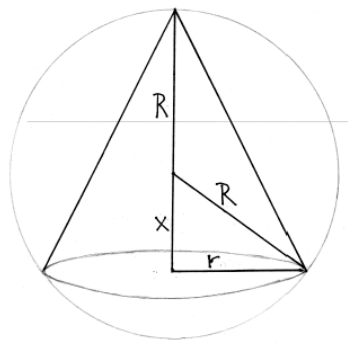
$V = r^2\pi m$

$V_{max} = \frac{4\sqrt{3}}{9}R^3\pi$, *ha* $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$, $m = \frac{2}{\sqrt{3}}R$.



3.5. ábra. 3.186. feladat

3.187. Megoldás *Legyen a kúp alapkörének a sugara r, magassága m. Vezessük be az ábrán jelzett x-et.*



3.6. ábra. 3.187. feladat

Ezzel a kúp sugara és magassága is kifejezhető.

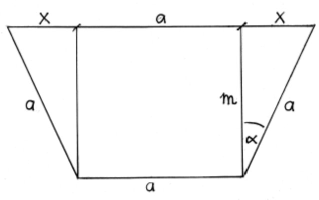
$V = \frac{r^2\pi m}{3}$; $r^2 = R^2 - x^2$, $m = R + x$.

$V = \frac{\pi}{3}(R^2 - x^2)(R + x)$

$V_{max} = \dfrac{32}{81}R^3\pi$, *ha* $m = \dfrac{4}{3}R$, $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}R$.

3.188. $r = m = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}$

3.189. Megoldás *A feladat megoldásában segít az ábra:* $T = \dfrac{2a+2x}{2}m = (a+x)m$



3.7. ábra. 3.189. feladat

$\varphi = 60°$.

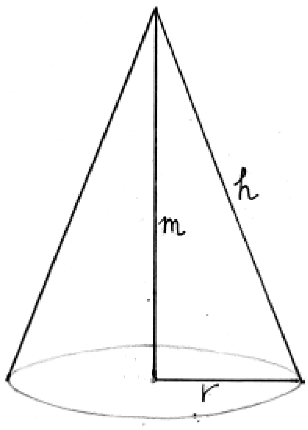
3.190. Megoldás *A feladat megoldásában segít az ábra:* $V_{max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{27}\pi h^3$, *ha* $r = \sqrt{\dfrac{2}{3}}h$, $m = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

3.191. Megoldás *A feladat megoldásában segít az ábra:* $l_{max} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$, *ha* $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$.

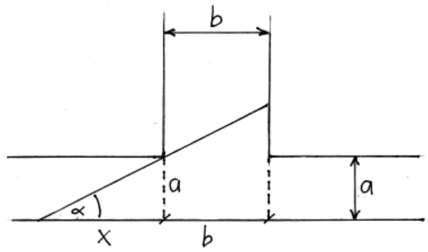
3.192. $P(2, \pm 4)$.

3.193. Megoldás *Egy óra alatt a hajó* $v - c$ *km-nyi utat tesz meg felfelé. Ez alatt a fogyasztása* $E = av^3$ *(a konstans arányossági tényező). A D költséget az egy km megtételéhez felhasznált energiával mérhetjük. A hajózás akkor a leggazdaságosabb, ha egy km út felfelé való megtételéhez a legkevesebb energia szükséges.*

A költség minimumát a $K = a\dfrac{v^3}{v-c}$ *költségfüggvény minimuma adja. A leggazdaságosabb sebesség:* $v = \dfrac{3}{2}c$ *km/h.*



3.8. ábra. 3.190. feladat



3.9. ábra. 3.191. feladat

3.194. *Minimális távolság esetén* $\alpha_1 = \alpha_2$.

3.195. Megoldás *Maximális terület* 5000 m^2*, ekkor* $a = 100$ *m,* $b = 50$ *m.*
A minimális terület 0 *(egyenes vonal).*

3.196. Megoldás *Jelölje* (x, y) *az ellipszis egy pontját. Ekkor* P *és* (x, y) *távolsága:*

$$d = \sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\,.$$

Ennek minimumát és maximumát keressük a $4x^2 + 9y^2 = 36$ *feltétel mellett.*

Nyilvánvaló, hogy d *és* d^2 *szélsőérték-helyei ugyanott vannak, ezért* d^2 *szélsőérték-helyeit fogjuk keresni. A feltételi egyenletből kifejezzük* y^2*-et, majd behelyettesítjük* d^2 *képletébe:*

$$d^2 = (x-1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + \frac{36-4x^2}{9} = \frac{5}{9}x^2 - 2x + 5$$

Keressük tehát az $f(x) = \frac{5}{9}x^2 - 2x + 5$ *függvény abszolút szélsőértékeit a* $[-3,\, 3]$ *intervallumon. A* $[-3,\, 3]$ *intervallumhoz úgy jutunk el, hogy a feltételi egyenlet átrendezésével* $9y^2 = 36 - 4x^2$*, amiből* $36 - 4x^2 \geq 0$*, azaz* $-3 \leq x \leq 3$ *adódik. Weierstrass tétele alapján tudjuk, hogy a keresett szélsőértékek léteznek.*

Keressük meg a derivált zérushelyét: $f'(x) = \frac{10}{9}x - 2 = 0$*, ennek egyetlen megoldása* $x = \frac{9}{5}$*. Ez benne van a* $[-3,\, 3]$ *intervallumban. Így:*

$$\min f = \min\left\{f\left(\frac{9}{5}\right),\, f(-3),\, f(3)\right\} = \min\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},\, 4,\, 2\right\} = \frac{4}{\sqrt{5}} = f\left(\frac{9}{5}\right)$$

$$\max f = \max\left\{f\left(\frac{9}{5}\right),\, f(-3),\, f(3)\right\} = \max\left\{\frac{4}{\sqrt{5}},\, 4,\, 2\right\} = 4 = f(-3)$$

Ennek alapján a P*-hez legközelebbi pontok (2 ilyen van):* $A_1(\frac{9}{5}, \frac{8}{5})$ *és* $A_2(\frac{9}{5}, -\frac{8}{5})$*, a legtávolabbi pont pedig* $B(-3, 0)$*.*

3.197. *A ház oldalainak hossza* 100 *m és* 50 *m.*

3.198. *A maximális területű téglalap oldalai* $\frac{r}{\sqrt{2}}$ *és* $\frac{2r}{\sqrt{2}}$*. A minimális területű téglalap a degenerált eset: egyetlen vonal.*

3.199. Megoldás *Legyen* $f(x)$ *a bevétel, ha* x *utas van. A* 200 *fölöttiek száma* $x - 200$*, ezért a jegyek ára ennyivel csökken, tehát darabonként* $30.000 - 100 \cdot (x - 200)$*. Ezért az összes jegy ára:*

$$f(x) = x\Big(30.000 - 100(x - 200)\Big) = 50.000x - 100x^2$$

Az $f'(x) = 0$ *egyenlet megoldása* $x = 250$*, így a potenciális szélsőérték helyek:* $x = 200$*,* $x = 250$*,* $x = 350$*. A megfelelő függvényértékek:*

$$f(200) = 600.000, \qquad f(250) = 625.000, \qquad f(350) = 525.000$$

Maximális a bevétel 250 *utas esetén, és minimális* 350 *utas esetén. (A feladat csupán elméleti...)*

3.200. *Négyzet.*

3.201. *Az egész drótból kört hajlítunk.*

3.2.8. Függvényvizsgálat

3.202. Megoldás Értelmezési tartomány*:* $x \in \mathbb{R},\ x > 0$.

A zérushelyeket az $x^2 \ln x = 0$ *egyenlet megoldásával kapjuk:* $x = 1$.

Határértékek*:* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0$ *(L'Hospital-lal),* $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \ln x = +\infty$.

Monotonitás, szélsőérték*:* $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x \cdot (2 \ln x + 1)$. *Ennek egyetlen zérushelye van:* $x = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

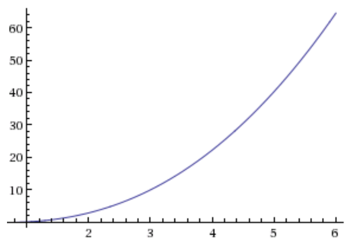
f *a* $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ *intervallumon csökken, az* $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ *intervallumon nő. Az* $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ *helyen abszolút minimuma van. A minimum értéke:* $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\dfrac{1}{2e}$.

Konvexitás, inflexiós pontok*:* $f''(x) = 1 \cdot (2 \ln x + 1) + x \cdot \dfrac{2}{x} = 2 \ln x + 3$. *Ennek egyetlen zérushelye van:* $x = e^{-3/2} = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$.

f'' *előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:*

f *a* $\left[0, \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right]$ *intervallumon konkáv, az* $\left[\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty\right)$ *intervallumon konvex. Az* $x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ *helyen inflexiós pontja van.*

A függvény grafikonja:



3.10. ábra. 3.202 feladat

Értékkészlet*:* $R_f = \left[-\dfrac{1}{2e}, +\infty\right)$.

3.203. $f(-1)$: *maximum,* $f(4)$: *minimum,* $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$: *inflexió.*

3.204. Megoldás Értelmezési tartomány*: $D_f = \mathbb{R}$, a függvény páratlan.*

Azérushelyek*et az* $\dfrac{x}{1+x^2} = 0$ *egyenlet megoldásával kapjuk:* $x = 0$.

Határértékek*:* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0$.

Monotonitás, szélsőérték*:* $f'(x) = \dfrac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. *Ennek zérushelyei:* $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

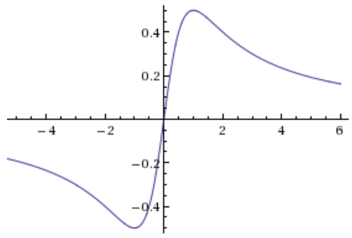
f *a* $(-\infty, -1]$ *intervallumon csökken, a* $[-1, 1]$ *intervallumon nő, az* $[1, +\infty)$ *intervallumon csökken. Az* $x = -1$ *helyen lokális minimuma, az* $x = 1$ *helyen lokális maximuma van. A lokális minimum értéke* $-\dfrac{1}{2}$, *a lokális maximum értéke* $\dfrac{1}{2}$.

Konvexitás, inflexiós pontok*:* $f''(x) = \dfrac{2x\cdot(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$. *Ennek három zérushelye van:* $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$.

f'' *előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:*

f *a* $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right]$ *és a* $\left[0, \sqrt{3}\right]$ *intervallumokon konkáv, a* $\left[-\sqrt{3}, 0\right]$ *és a* $\left[\sqrt{3}, +\infty\right)$ *intervallumokon konvex. Az* $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{3}$ *helyeken inflexiós pontja van.*

Aszimptota az x*-tengely. A függvény grafikonja:*



3.11. ábra. 3.204 feladat

Értékkészlet*:* $R_f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. *Az* $x_1 = -1$ *helyen abszolút minimuma, az* $x_2 = 1$ *helyen abszolút maximuma van.*

3.205. Megoldás Értelmezési tartomány*:* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *a függvény páratlan.*

A zérushelyeket az $x + \dfrac{1}{x} = 0$ *egyenlet megoldásával kapjuk. Ennek az egyenletnek azonban nincs valós gyöke, tehát a függvénynek nincs zérushelye.*

Határértékek*:* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$.

Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. *Ennek zérushelyei:* $x_1 = -1, x_2 = 1$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

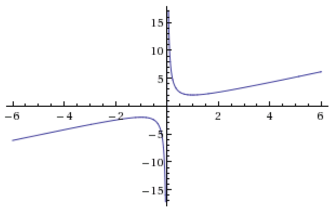
f *a* $(-\infty, -1]$ *intervallumon nő, a* $[-1, 0)$ *intervallumon csökken, a* $(0, 1]$ *intervallumon csökken, az* $[1, +\infty)$ *intervallumon nő. Az* $x = -1$ *helyen lokális maximuma, az* $x = 1$ *helyen lokális minimuma van. A lokális maximum értéke* -2*, a lokális minimum értéke* 2.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$. *Ennek nincs zérushelye.*

f'' *előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:*

f *a* $(-\infty, 0)$ *intervallumon konkáv, a* $(0, +\infty)$ *intervallumon konvex. Inflexiós pontja nincs.*

Aszimptota az $y = x$ *egyenes. A függvény grafikonja:*



3.12. ábra. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Értékkészlet: $R_f = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. *Abszolút szélsőértékei nincsenek.*

3.206. Megoldás Értelmezési tartomány: $D_f = \mathbb{R}$, *a függvény páros. Zérushely nincs, mivel bármely* $x \in \mathbb{R}$ *esetén* $e^{-x^2} > 0$.

Határértékek: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$.

Monotonitás, szélsőérték: $f'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$. *Ennek egyetlen zérushelye van:* $x = 0$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

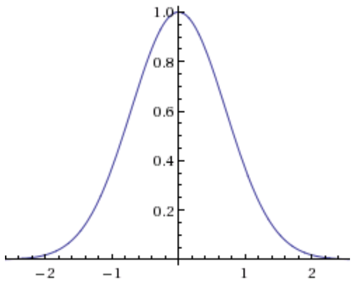
f *a* $(-\infty, 0]$ *intervallumon nő, a* $[0, +\infty)$ *intervallumon csökken. Az* $x = 0$ *helyen abszolút maximuma van. A maximum értéke:* $f(0) = 1$.

Konvexitás, inflexiós pontok: $f''(x) = 2e^{-x^2} \cdot (2x^2 - 1)$. *Ennek két zérushelye van:* $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

f'' *előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:*

f *a* $\left(-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ *és az* $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ *intervallumokon konvex, a* $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ *intervallumon konkáv. Az* $x_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ *helyeken inflexiós pontja van.*

A függvény grafikonja:



3.13. ábra. $f(x) = e^{-x^2}$

Értékkészlete a $(0, 1]$ *intervallum.*

3.207. Megoldás $D_f : \{x \in R/\{-1\}\}$; $f(0) = 0$: *minimum,* $f(-2) = 4$: *maximum, inflexió nincs, aszimptotája az* $y = x - 1$ *egyenes.*

A $(-\infty, -2)$ *és* $(0, +\infty)$ *szakaszokon növekvő,* $(-2, -1)$ *és* $(-1, 0)$ *szakaszokon csökkenő.*

$R_f : \{0 < f(x) \leq -4, \; f(x) \geq 0\}$

3.208. Megoldás Értelmezési tartomány*:* $D_f = \mathbb{R}$.

Zérushelyek*: az* $e^x \cdot \cos(x) = 0$ *egyenlet megoldásával kapjuk, hogy*

$$x = z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Kapcsolat az exponenciális függvénnyel: az $e^x \cdot \cos(x) = e^x$ *egyenlet megoldásával kapjuk, hogy* $\cos(x) = 1$, *azaz* $x = x_k = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$. *Könnyű kiszámolni, hogy az* x_k *pontokban* f *és* e^x *deriváltja azonos. E két összefüggés azt jelenti, hogy az* x_k *pontokban* f *grafikonja érinti az* $x \mapsto e^x$ *függvény grafikonját.*

Hasonlóan, az $e^x \cdot \cos(x) = -e^x$ *egyenlet megoldásával kapjuk, hogy az* $y_k = (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ *pontokban* f *grafikonja érinti az* $x \mapsto -e^x$ *függvény grafikonját.*

Szemléletesen: f *"be van szorítva"* e^x *és* $-e^x$ *közé.*

Határértékek*: Mivel* $-e^x \leq f(x) \leq e^x$, *ezért* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. *A* $+\infty$*-ben viszont* f*-nek nincs határértéke, mivel*

$$\lim_{k\to+\infty} f(z_k) = \lim_{k\to\infty} 0 = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} e^{2k\pi} = +\infty.$$

Monotonitás, szélsőérték*:* $f'(x) = e^x(\cos(x) - \sin(x))$*. Ennek zérushelyei:* $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

A deriváltfüggvény előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:

f a $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right]$ *intervallumokon csökken, a* $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{9\pi}{4} + 2k\pi\right]$ *intervallumokon nő* $(k \in \mathbb{Z})$.

Az $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ *helyeken lokális maximuma, az* $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ *helyeken lokális minimuma van* $(k \in \mathbb{Z})$.

Konvexitás, inflexiós pontok*:* $f''(x) = -2e^x \sin(x)$*. Ennek zérushelyei:* $x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

f'' *előjelének vizsgálatával az alábbi következtetésre jutunk:*

f a $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ *intervallumokon konkáv), a* $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ *intervallumokon konvex, az* $x = k\pi$ *helyeken inflexiós pontja van* $(k \in \mathbb{Z})$.

Vegyük észre, hogy az inflexiós pontok éppen azok a helyek, ahol az f "hozzáér" az exponenciális függvényhez.

Értékkészlete*:* $R_f = \mathbb{R}$.

4. fejezet

Integrálszámítás

4.1. Integrálszámítás

4.1.1. Határozatlan integrál

Elemi függvények

4.1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx$

4.2. $\displaystyle\int \frac{x}{x+1} dx$

4.3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

4.4. $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\, dx$

4.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

4.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

4.7. $\displaystyle\int x^2\left(x^2-1\right) dx$

4.8. $\displaystyle\int \left(x^2-1\right)^2 dx$

4.9. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}\, dx$

4.10. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

4.11. $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$

4.12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

4.13. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}\, dx$

4.14. $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\ dx$

4.15. $\displaystyle\int \frac{6}{5+5x^2}\ dx$

4.16. $\displaystyle\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\ dx$

4.17. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\ dx$

4.18. $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}\ dx$

4.19. $\displaystyle\int 3x^5 dx$

4.20. $\displaystyle\int \frac{x^2-7x+8}{x^2} dx$

Helyettesítés

4.21. $\displaystyle\int e^{-x}\ dx$

4.22. $\displaystyle\int \cos(4x-5)\ dx$

4.23. $\displaystyle\int \sqrt{8-2x}\ dx$

4.24. $\displaystyle\int \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\ dx$

4.25. $\displaystyle\int 10^x \cdot e^x\ dx$

4.26. $\displaystyle\int \frac{dx}{5+x^2}$

4.27. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}}\ dx$

4.28. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$

4.29. $\displaystyle\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\ dx$

4.30. $\displaystyle\int x\sqrt{1-x^2}\ dx$

4.31. $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{x^3+8}\ dx$

4.32. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx$

4.33. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx$

4.34. $\displaystyle\int x\sin(x^2+2)\ dx$

4.35. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{tg\ x}}{\cos^2(x)}\ dx$

4.36. $\displaystyle\int \frac{x}{4+x^2}\ dx$

4.37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x}$

4.38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\ dx$

4.39. $\displaystyle\int \frac{x+2}{2x-1}\ dx$

4.40. $\displaystyle\int \frac{x^4}{1-x}\ dx$

4.41. $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+1}\ dx$

4.42. $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}\ dx$

4.43. $$\int \frac{x^7}{\sqrt{x^8-1}}\ dx$$

4.44. $$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\ dx$$

4.45. $$\int \sin(8x) dx$$

4.46. $$\int \frac{1}{3x-5} dx$$

4.47. $$\int e^{5x+7} dx$$

4.48. $$\int \sin^3(x)\cos(x) dx$$

4.49. $$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$$

4.50. $$\int tg\ x dx$$

4.51. $$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)} dx$$

Parciális integrálás

4.52. $$\int (x^2-1)\sin(3x)\ dx$$

4.53. $$\int \left(\frac{x+2}{e^x}\right)^2\ dx$$

4.54. $$\int x^2 2^x\ dx$$

4.55. $$\int x^3 e^{-x^2}\ dx$$

4.56. $$\int \sin\sqrt{x}\ dx$$

4.57. $\int x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)\ dx$

4.58.

4.59. $\int x \cdot\ \ arc\ tg\ x\ dx$

4.60. $\int\ arc\ tg\sqrt{x}\ dx$

4.61. $\int \ln^3 x\ dx$

4.62. $\int (arc \sin(x))^2\ dx$

4.63. $\int e^{3x} \cos(2x)\ dx$

4.64. $\int e^{arc \sin(x)}\ dx$

Racionális törtfüggvények

4.65.

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\ dx$$

4.66.

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\ dx$$

4.67.

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\ dx$$

4.68.

$$\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\ dx$$

4.69.

$$\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\ dx$$

4.70.

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\ dx$$

4.71.

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\ dx$$

4.72.

$$\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\ dx$$

4.73.

$$\int \frac{dx}{x^4-x^2}$$

4.74.

$$\int \frac{dx}{x^6+x^4}$$

4.75.

$$\int \frac{x}{x^3-1}\ dx$$

4.76.

$$\int \frac{x^2}{1-x^4}\ dx$$

4.77.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

4.78.

$$\int \frac{1}{1+x^4}\ dx$$

4.79.

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}\ dx$$

4.80.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3}$$

4.81.

$$\int \frac{1}{(x-3)^4}dx$$

4.82.

$$\int \frac{2}{x-5}dx$$

4.83.

$$\int \frac{x-3}{x^2-6x+27}dx$$

4.84.

$$\int \frac{x-1}{x^2-6x+27}dx$$

4.85.

$$\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x}dx$$

Trigonometrikus függvények

4.86.

$$\int \cos^5 x \ dx$$

4.87.

$$\int \sin^6 x \ dx$$

4.88.

$$\int \sin^6(x)\cos^3(x) \ dx$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \ dx$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}\ dx$$

4.91.

$$\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)}$$

4.92.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)}$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5 - 3\cos(x)}$$

4.94.

$$\int tg^5 x\ dx$$

4.95.

$$\int \frac{dx}{\sin^4(x) \cdot \cos^4(x)}$$

4.96.

$$\int \frac{1 + tg\ x}{\sin(2x)}\ dx$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2(x)}$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4(x) + \sin^4(x)}{\cos^2(x) - \sin^2(x)}\ dx$$

4.99.

$$\int \sin(3x) \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)\ dx$$

4.100.

$$\int \sqrt{1 + \sin(x)}\ dx$$

Hiperbolikus és exponenciális kifejezések

4.101.

$$\int sh^2x \cdot ch^3x \ dx$$

4.102.

$$\int \frac{sh^3x}{\sqrt{ch \ x}} \ dx$$

4.103.

$$\int \frac{dx}{sh \ x \cdot ch \ x}$$

4.104.

$$\int \frac{dx}{sh \ x}$$

4.105.

$$\int ch \ x \cdot ch \ 2x \cdot ch \ 3x \ dx$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \ dx$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x - 3} \ dx$$

4.108.

$$\int e^x \cdot \ sh \ 3x \ dx$$

4.109.

$$\int e^x \cdot sh \ xdx$$

Gyökös kifejezések

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\ dx$$

4.111.

$$\int (x^2-3x+2)\cdot\sqrt{2x-1}\ dx$$

4.112.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$$

4.113.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\ dx$$

4.114.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$$

4.115.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x}$$

4.116.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\ dx$$

4.117.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$$

4.118.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}}$$

4.120.

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2-3x+1}\ dx$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2+6x+10}\ dx$$

4.123.

$$\int \sqrt{3-x^2}\ dx$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+40}}$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}}$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2+8x+5}\ dx$$

4.127.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4+x-x^2}}\ dx$$

4.1.2. Határozott integrálok. Vegyes feladatok

4.128.

$$\int_0^1 2x^2+x+1\ dx$$

4.129.

$$\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

4.130.

$$\int_{2}^{3} \frac{1}{(2x+1)^2} dx$$

4.131.

$$\int_{0}^{1} e^{2x} dx$$

4.132.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(x) dx$$

4.133.

$$\int_{0}^{\pi} \sin^3(x) dx$$

4.134.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2(x)\sin^3(x)\ dx$$

4.135.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(x)}\ dx$$

4.136.

$$\int_{0}^{\pi} \sin(4x)\cos(3x)\ dx$$

4.137.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)\sin^2(x)\ dx$$

4.138.

$$\int_{0}^{\pi} \sin(4x)\cos(5x)\ dx$$

4.139.

$$\int_{0}^{1} x \cdot e^{-x^2} dx$$

4.140.

$$\int_{1}^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$$

4.141.

$$\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$

4.142.

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.143.

$$\int_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{5x-4}} dx$$

4.144.

$$\int_{0}^{2} xe^{x} dx$$

4.145.

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} 2x \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx$$

4.146.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \sin(3x)\ dx$$

4.147.

$$\int_{0}^{1} \left(\frac{x+2}{e^x} \right)^2\ dx$$

4.148.

$$\int_{0}^{1} x^2 a^x\ dx, \qquad a > 0$$

4.1.3. Improprius integrálok

Számítsuk ki az alábbi improprius integrálok értékét!

4.149. $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^2}\ dx]$

4.150. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\ dx$

4.151. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$

4.152. $\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{5}{x^2 - 2x + 2}\ dx$

4.153. $\int_{-\infty}^{-3} xe^x\ dx$

4.154. $\int_{-\infty}^{10} xe^x\ dx$

4.155. $\int_{4}^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\ dx$

4.156. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^3}\ dx$

4.157. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3x+1}\ dx$

4.158. $\displaystyle\int_{1}^{\infty} e^{-2x+1}\ dx$

4.159. $\displaystyle\int_{3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\ dx$

4.160. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\ dx$

4.161. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1-x}\ dx$

4.162. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\ dx$

4.163. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2x-1}\ dx$

4.164. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\ dx$

4.165. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

4.166. $\displaystyle\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

4.167. $\displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{5} \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$

4.168. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

4.169. $\displaystyle\int\limits_{1/2}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

4.170. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

4.171. $$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$$

4.172. $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

4.173. $$\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

4.174. $$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} dx, \qquad a > 0$$

4.175. $$\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-ax} dx$$

4.176. $$\int\limits_{0}^{\infty} \cos(x) e^{-x} dx$$

4.177. $$\int\limits_{2/\pi}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$$

4.178. $$\int\limits_{0}^{\infty} \sin(ax) e^{-bx} dx$$

4.179. $$\int\limits_{0}^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

4.180. $$\int\limits_{0}^{\infty} x^n e^{-ax} dx$$

4.1.4. Az integrálszámítás alkalmazásai

Területszámítás

Határozzuk meg a függvények gráfjai alatti területet, és ábrázoljuk a függvényeket.

4.181. $y = \dfrac{3x^2}{2}; \quad -2 \leq x \leq 2$

4.182. $y = \dfrac{5}{3x^2} + x; \quad 1 \leq x \leq 3$

4.183. $y = \sqrt{x}; \quad 0 \leq x \leq 1$

4.184. $y = (1-x)^3; \quad -2 \leq x \leq 1$

4.185. $y = x^3 - 3; \quad 3 \leq x \leq 4$

4.186. $y = x^4 - x^3; \quad 1 \leq x \leq 2$

4.187. $y = e^{2x}; \quad -0.5 \leq x \leq 1$

4.188. $y = \sin(3x); \quad 0 \leq x \leq 0.3$

4.189. $y = \cos(3x); \quad -0.5 \leq x \leq 0.5$

4.190. $y = \cos(\dfrac{x}{2}); \quad 0 \leq x \leq \pi$

4.191. $y = \mathrm{ch}(2x); \quad 0 \leq x \leq 3$

4.192. $y = \mathrm{sh}(x); \quad 0 \leq x \leq 2$

4.193. $y = \dfrac{2}{x}; \quad -2 \leq x \leq -1$

4.194. $y = \dfrac{1}{1+x}; \quad 1 \leq x \leq 3$

4.195. $y = \dfrac{1}{2x-5}; \quad 3 \leq x \leq 4$

4.196. $y = \dfrac{1}{2x-5}; \quad 5 \leq x \leq 10$

4.197. *Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{1+x^2}$ görbe alatti terület 0-tól x-ig terjedő része $\frac{\pi}{4}$-gyel legyen egyenlő!*

4.198. *Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = e^{-2x}$ görbe alatti terület x-től 1-ig terjedő része 3-mal legyen egyenlő!*

4.199. *Határozzuk meg $x \in [0, \pi]$ értékét úgy, hogy az $y = \sin(x)$ alatti terület 0-tól x-ig terjedő része $\frac{1}{4}$-del legyen egyenlő!*

Határozzuk meg a következő görbék közötti területet és ábrázoljuk is a görbéket.

4.200. $y = x^2$ *és* $y = 2x$

4.201. $y = \sqrt{x}$ *és* $y = \frac{x}{2}$

4.202. $y = x^2$ *és* $y = 1 - x^2$

4.203. $y = x^2$ *és* $y = 1 - 3x^2$

4.204. $y = x^2$ *és* $y = 3x$

4.205. $y = \frac{x^2}{3}$ *és* $y = 2 + \frac{x}{3}$

4.206. $y = \frac{1}{x}$ *és* $y = 2.5 - x$

4.207. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ *és* $y = 1 - x$

4.208. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ *és* $x + y = 1$

Végezzük el az alábbi területszámításokat.

4.209. *Határozzuk meg az $y = x(1-x)$ parabola és ennek az $x = 0, x = 2$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintői közötti területet!*

4.210. *Határozzuk meg az $y = 4.5 - \frac{1}{2}(x-4)^2$ parabola, és ennek az $x = 3$ és $x = 6$ pontjában húzott érintői közötti területet!*

4.211. *Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola, és a $P(2,2)$ pontra illeszkedő, $y = x$ egyenesre merőleges egyenes által határolt síkidom területét.*

4.212. *Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola, az $y = x$ és az $y = \frac{x}{a^2}$ (ahol $a > 0$ adott) egyenes által határolt síkidom területét! Ábrázoljuk is a szektort!*

Görbe ívhossza

Határozzuk meg az függvények görbéjének ívhosszát a megadott határok között.

4.213. $y = x^2; \quad 1 \leq x \leq 4$

4.214. $y = \operatorname{ch} x; \quad 0 \leq x \leq 3$

4.215. $y = \ln x; \quad 2 \leq x \leq 6$

4.216. $y = \ln(\sin(x)); \quad \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

4.217. $x^2 + y^2 = 25; \quad 0 \leq x \leq 5$

4.218. $x = 5\cos t; \; y = 5\sin t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

4.219. $x = a(t - \sin t); \; y = a(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

4.220. $x = 5\cos^3 t; \; y = 5\sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$

4.221. $x = 2t; \; y = 3t^2; \quad 2 \leq t \leq 5$

Forgástestek térfogata

Forgassuk meg a következö görbéket az x tengely körül, és határozzuk meg a keletkező forgásfelületek és a megadott intervallumok végpontjaiban az x tengelyre állított merőleges síkok határolta térrész térfogatát.

4.222. $y = e^{2x}; \quad 0 \leq x \leq 2$

4.223. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 4$

4.224. $y = \frac{x^3}{3}; \quad 1 \leq x \leq 2$

4.225. $y = x - \frac{1}{x}; \quad 1 \leq x \leq 3$

4.226. $y = 1 - x^2; \quad -1 \leq x \leq 1$

4.227. $y^2 - x^2 = 1; \quad 0 \leq x \leq 3$

4.228. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; \quad 0 \le x \le 1$

4.229. $y = \cos^2 x; \quad 0 \le x \le \pi$

4.230. $y = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \le x \le 3$

4.231. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \le x \le a$

4.2. Integrálszámítás. Megoldások

4.2.1. Határozatlan integrál

Elemi függvények

4.1. $\ln|x+1|+C.$

4.2. Megoldás

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx=\int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)\,dx=x-\ln|x+1|+C.$$

4.3. $x-\operatorname{arc\,tg} x+C.$

4.4. $-\frac{1}{4}\cos(2x)+C.$

4.5. Megoldás

$$\int \frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\ dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C.$$

4.6. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\int x^{-\frac{1}{3}}\ dx=3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$$

4.7. Megoldás

$$\int x^2\left(x^2-1\right)\ dx=\int\left(x^4-x^2\right)\ dx=\int x^4\ dx-\int x^2\ dx=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+C.$$

4.8. Megoldás

$$\int\left(x^2-1\right)^2 dx=\int\left(x^4-2x^2+1\right)dx=\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C.$$

4.9. Megoldás

$$\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}\ dx=\int\left(x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{x}+x^2\right)\ dx=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\ln|x|+\frac{x^3}{3}+C.$$

4.10. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C.$

4.11. Megoldás

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\ dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)\ dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C.$$

4.12. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

4.13. $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x-2|+C.$

4.14. Megoldás

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\ dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right)\ dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\ dx = -\frac{1}{x}+arc\ tg\ x+C.$$

4.15.

$$\int \frac{6}{5+5x^2}\ dx = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{6}{5}\ arc\ tg\ x+C.$$

4.16.

$$\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\ dx = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\cdot arc\ sh\ x+C.$$

4.17. $\mathrm{tg}\,(x)-x+C.$

4.18.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}\ dx &= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos(x)-\sin(x)}\ dx\\ &= \int (\cos(x)+\sin(x))\ dx = \sin(x)-\cos(x)+C.\end{aligned}$$

4.19. $\frac{x}{2}+C.$

4.20. $x-7\ln|x|-\frac{8}{x}+C.$

Helyettesítés

4.21. Megoldás *Végezzük el az $u = -x$ helyettesítést, ezzel $dx = -du$:*

$$\int e^{-x}\ dx = -\int e^{u}\ du = -e^{u} + C = -e^{-x} + C.$$

4.22. *Végezzük el az $u = 4x - 5$ helyettesítést. Ekkor $du = 4\ dx$, és így*

$$\int \cos(4x-5)\ dx = \frac{1}{4}\int \cos u\ du = \frac{1}{4}\sin u + C = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + C.$$

M*egjegyzés: Az ilyen integrálokat célszerű annak az összefüggésnek a felhasználásával kiszámítani, hogy ha*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

akkor

$$\int f(Ax+b)\ dx = \frac{1}{A}F(Ax+b) + C.$$

Például:

$$\int \cos(x)\ dx = \sin(x) + C,$$

tehát

$$\int \cos(4x-5)\ dx = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + C.$$

A továbbiakban ezt az eljárást alkalmazzuk valahányszor a belső függvény x-nek lineáris függvénye.

4.23. Megoldás

$$\int \sqrt{8-2x}\ dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(8-2x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(8-2x)^3} + C.$$

4.24. Megoldás

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\ dx = -\frac{1}{3}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right] + C = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) + C.$$

4.25. Megoldás

$$\begin{aligned}\int 10^x e^x\ dx &= \int e^{x\ln 10}\cdot e^x\ dx = \int e^{x(1+\ln 10)}\ dx \\ &= \frac{e^{x(1+\ln 10)}}{1+\ln 10} + C = \frac{10^x e^x}{1+\ln 10} + C.\end{aligned}$$

Megoldás közben azt az összefüggést használtuk fel, hogy $a = e^{\ln a}$, ill. $10 = e^{\ln 10}$. Ezért

$$10^x = \left(e^{\ln 10}\right)^x = e^{x\ln 10}.$$

4.26. Megoldás

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

4.27. Megoldás

$$\int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}}\ dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3x^2}{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\ arch\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right) + C = = \sqrt{3}\ arch\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right) + C.$$

4.28. $-\dfrac{1}{8(2x-3)^4} + C.$

4.29. $-\dfrac{5}{33}\cdot\sqrt[5]{(8-3x)^{11}} + C.$

4.30. Megoldás

$$\int x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int (-2x)\cdot\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = -\frac{1}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3} + C.$$

Az integrálban $u = 1 - x^2$ helyettesítést végeztük el, ekkor $du = -2x\ dx$.

4.31. $\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(x^3+8)^4} + C$

4.32. Megoldás

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+1} + C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2 + 1$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.33. Megoldás

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\sin(x)} + C.$$

A használt helyettesítés: $u = \sin(x)$, *ekkor* $du = \cos(x)\ dx$.

4.34. Megoldás

$$\int x \sin(x^2+2)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin u\ du = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+2\right) + C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2 + 2$, *ekkor* $du = 2x\ dx$.

4.35. $\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x} + C.$

4.36. Megoldás

$$\int \frac{x}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right) + C.$$

Azt látjuk, hogy 2-vel való szorzás után a számláló a nevező deriváltja, tehát a kifejezés integrálja a nevező e alapú logaritmusával egyenlő. Ezt a szabályt jól tanuljuk meg és az ilyen esetekben mellőzzük a helyettesítést, bár ez az előzőek egy speciális esete. (Most is alkalmazhattuk volna az $u = x^2 + 4$ *helyettesítést.)*

4.37.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\ dx = \ln\ln x + C$$

4.38. Megoldás

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\ln^3 x} + C.$$

A használt helyettesítés $u = \ln x$, *ekkor* $du = \frac{1}{x}\ dx$.

4.39. Megoldás

$$\int \frac{x+2}{2x-1}\ dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{2x-1}\right)\ dx = \frac{x}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1) + C.$$

4.40. Megoldás

$$\int \frac{x^4}{1-x}\,dx = \int \left(-x^3 - x^2 - x - 1 - \frac{1}{x-1}\right) dx$$
$$= -\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln(x-1) + C.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{x^4}{1-x} = -\frac{x^4}{x-1} = -\left(x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right).$$

4.41. Megoldás

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\ arc\ tg\ u + C = \frac{1}{2}\ arc\ tg\ x^2 + C.$$

A használt helyettesítés $u = x^2$, *ekkor* $du = 2x\ dx$.

4.42. Megoldás

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = arsh\ u + C = arsh(\sin(x)) + C.$$

A használt helyettesítés: $u = \sin(x)$, *ekkor* $du = \cos(x)dx$.

4.43. $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{x^8 - 1} + C.$

4.44. Megoldás *Ilyen esetekben az integrálandó függvényt két függvény összegére bontjuk. Az egyik függvénynél a számláló a nevező deriváltjának konstansszorosa legyen, a másik függvénynél pedig a számláló már csak egy konstans, melyet az integrál jel elé is kivihetünk. Tehát*

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\,dx = \int \left(\frac{3x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\,dx - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{3}\ arc\ tg\ \frac{x}{3} + C.$$

4.45. $\int \sin(8x)dx = -\frac{\cos(8x)}{8} + C.$

4.46. $\int \frac{dx}{3x-5} = \ln|3x-5| + C.$

4.47. $\displaystyle\int e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}e^{5x+7} + C.$

4.48. $\displaystyle\int \sin^3(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^4(x)}{4} + C.$

4.49. $-\dfrac{1}{2}(1-x^3)^{2/3} + C.$

4.50. $-\ln|\cos(x)| + C.$

4.51. $2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$

Parciális integrálás

4.52. $-\dfrac{(x^2-1)\cos 3x}{3} + \dfrac{2x\sin 3x}{9} + \dfrac{2\cos 3x}{27} + C.$

4.53. Megoldás

$$\int \left(\frac{x+2}{e^x}\right)^2 dx = \int \left(x^2+4x+4\right) e^{-2x}\, dx = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right) e^{-2x} + C.$$

4.54. $\dfrac{x^2 2^x}{\ln 2} - \dfrac{x 2^{x+1}}{(\ln 2)^2} + \dfrac{2^{x+1}}{(\ln 2)^3} + C.$

4.55. Megoldás

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int x^2 e^{-x^2} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int u e^{-u} du = -\frac{1}{2}(x^2+1)\; e^{-x^2} + C,$$

ahol $u = x^2$ *helyettesítéssel* $du = 2xdx$.

4.56. Megoldás $t = \sqrt{x}$ *helyettesítéssel, majd parciális integrálással:* $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + 2\sin\sqrt{x} + C.$

4.57. Megoldás

$$\int x\sin(x)\cos(x)\, dx = \frac{1}{2}\int x\sin(2x)\, dx = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}\cos(2x) + C.$$

4.58. Megoldás *A* $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ *linearizáló formulát alkalmazzuk, majd kétszer parciálisan integrálunk.*

Az eredmény: $\dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2\sin(2x)}{4} + \dfrac{x\cos(2x)}{4} - \dfrac{\sin(2x)}{8} + C.$

4.59. Megoldás

$$\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{v} \; dx = *,$$

ahol a parciális integráláskor $u = \frac{x^2}{2}$, *és* $v' = \frac{1}{1+x^2}$. *Így*

$$* = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \; dx.$$

4.60. Megoldás

$$\int \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} \; dx = 2\int u\operatorname{arc\,tg} u \; du = x\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + C$$

A használt helyettesítés: $x = u^2$, *ekkor* $dx = 2u \; du$.

4.61. Megoldás *Két parciális integrálást kell elvézgezni:*

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^3 x}_{v} \; dx = x\ln^3 x - \int \underbrace{3}_{u'} \underbrace{\ln^2 x}_{v} \; dx =$$

$$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\int \ln x \; dx == x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

4.62. Megoldás $u' = 1$, $v = (\arcsin x)^2$ *válsztással egy parciális integrálást végzünk, ekkor*

$$u = x \qquad v' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

és ezért

$$\int (\arcsin x)^2 \; dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \; arc\sin(x) dx = *$$

Újabb parciális integrálást végzünk

$$u = \arcsin x, \qquad v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

választással, ekkor

$$* = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2\int dx =$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x - 2x + C.$$

4.63. Megoldás *Kétféleképpen végezzünk parciális integrálást:*

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u} \underbrace{\cos(2x)}_{v'} \ dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin(2x) - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin(2x)\ dx \tag{4.1}$$

ahol

$$u' = 3e^{3x} \qquad v = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Másrészt

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u'} \underbrace{\cos(2x)}_{v} \ dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{3}\int e^{3x}\sin(2x)\ dx \tag{4.2}$$

ahol

$$u = \frac{1}{3}e^{3x} \qquad v' = -2\sin(2x).$$

Szorozzuk meg (4.1)-et néggyel, (4.2)-t pedig kilenccel és vonjuk össze az így adódó kifejezések jobb- illetve bal oldalát.

$$4\int e^{3x}\cos(2x)\ dx = 2e^{3x}\sin 2x - 6\int e^{3x}\sin(2x)\ dx$$

$$9\int e^{3x}\cos 2x\ dx = 3e^{3x}\cos 2x + 6\int e^{3x}\sin(2x)\ dx$$

$$13\int e^{3x}\cos(2x)\ dx = 2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos(2x) + C.$$

Végül 13-al való osztás után nyerjük, hogy:

$$\int e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}e^{3x}(2\sin(2x) + 3\cos(2x)) + C.$$

4.64. Megoldás

$$\int e^{\arcsin x}\ dx = \int e^u \cos u\ du,$$

ahol $\arcsin x = u$*, azaz* $x = \sin u$ *helyettesítéssel* $dx = \cos u\ du$ *Így olyan alakra jutottunk, melyet parciálisan lehet integrálni, éppen az előző példában is bemutatott módszerrel. A parciális integrálást elvégezve adódik, hogy*

$$\int e^u \cos u du = \frac{1}{2}e^u(\sin u + \cos u) + C,$$

tehát

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2}\ e^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2} + C).$$

4.65. Megoldás *Ha a másodfokú nevezőjű törtfüggvény nevezője tényezők szorzataként írható fel, akkor a tört lineáris nevezőjű törtek összegére bontható. Annak érdekében, hogy ezt a felbontást elvégezhessük a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk az így nyert egyenletet, mert ennek az egyenletnek a gyöktényezői lesznek a szorzat alakban felírt nevező tényezői. Az* $x^2 - 7x + 12 = 0$ *egyenlet gyökei:* $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, *azaz*

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3) \cdot (x - 4)$$

Most már ismerjük a keresett lineáris tört-függvények nevezőit, határozzuk még a számlálókat, melyek lineáris nevező esetén konstansok. Jelöljük ezeket A*-val és* B*-vel, akkor*

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \equiv \frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}.$$

Azonosságot írtunk, mert olyan A *és* B *értéket keresünk, melyek mellett az egyenlőség minden* x*-re fennáll. Mivel a nevezők azonosan egyenlők az azonosságnak a számlálókra is fenn kell állni, azaz*

$$x - 2 \equiv A(x-4) + B(x-3).$$

Az azonosság nyilván fennáll, ha az x*-es tagok együtthatója mind a két oldalon egyenlő ugyanúgy, mint a konstansok. Ez azonban két egyenletet szolgáltat, melyekből* A *és* B *kiszámítható.*

$$B = 2, \qquad A = -1$$

A kapott értékeket behelyettesítve

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = -\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}.$$

Ezért az integrál

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}\right) dx = -\ln(x-3) + 2\ln(x-4) + C =$$

$$= \ln c\frac{(x-4)^2}{x-3}, \qquad (C = \ln c \text{ bevezetésével})$$

4.66. Megoldás *Az* $x^2+4x+8 = 0$ *egyenletnek nincsenek valós gyökei, tehát* x^2+4x+8 *nem bontható tényezők szorzatára. Bntsuk fel a törtet két tört összegére, melynek nevezője közös (a régi nevező), az egyik számlálója a nevező deriváltjának valami konstans-szorosa, a másiké pedig konstans. A nevező deriváltja* $2x + 4$, *tehát a számlálókat a következő alakban keressük*

$$\alpha(2x+4) \qquad \textit{és} \qquad \beta.$$

α *és* β *értékét a következő feltételekből határozhatjuk meg:*

$$\alpha(2x+4) + \beta = 3x - 2.$$

Most is két egyenletet írhatunk fel, melyekből α és β meghatározható.

$$2\alpha = 3, \qquad 4\alpha + \beta = -2,$$

ezekből

$$\alpha = \frac{3}{2}, \qquad \beta = -8.$$

Így az integrált két integrál összegére bontottuk:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\, dx - 8\int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Az első integrál eredménye ismert, hiszen a számláló a nevező deriváltja. A másodikat pedig teljes négyzetté való átalakítással vezetjük vissza ismert feladatra.

$$\frac{1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4\left[\frac{(x+2)^2}{4}+1\right]}$$

ezért

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4} 2\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+2}{2} + C.$$

Tehát a megoldás:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8} dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8) - 4\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+2}{2} + C.$$

4.67. Megoldás $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ *számlálója magasabb fokú mint a nevezője, ezért felbontható egy polinom és egy valódi tört összegére.*

$$\left(x^5+x^4-8\right) : \left(x^3-4x\right) = x^2+x+4$$

$$\begin{array}{l}
-(x^5-4x^3) \\ \hline
\quad x^4+4x^3-8 \\
-(x^4-4x^2) \\ \hline
\quad 4x^3+4x^2-8 \\
-(4x^3-16x) \\ \hline
4x^2+16x-8
\end{array}$$

A polinom osztás eredménye:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x},$$

tehát

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx = \int (x^2+x+4) dx + \int \frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} dx.$$

Az első integrál kiszámítása nem okoz gondot. A második meghatározásához a törtet részlet-törtek összegére kell bontanunk.
A nevezőt most minden különösebb számítás nélkül fel tudjuk írni szorzat alakjában

$$x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x+2)(x-2),$$

tehát

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2} =$$
$$= \frac{A(x^2-4) + B(x^2-2x) + C(x^2+2x)}{x^3-4x}.$$

Ennek alapján felírhatjuk az egyenletrendszert, melyből A, B és C kiszámítható:

$$A + B + C = 4 \quad -2B + 2C = 16 \quad -4A = -8,$$

és innen

$$A = 2, \qquad B = -3, \qquad C = 5.$$

Megjegyezzük, hogy ilyen esetekben, amikor a gyökök mind különbözőek, általában gyorsabban kapjuk az ismeretlen A, B, C értékeket, ha a számlálók egyenlőségét kifejező egyenletben x helyére a gyököket helyettesítjük.
Példánkban az

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x^2-4) + B(x^2-2x) + C(x^2+2x)$$

kifejezésben x helyébe zérust írva azonnal nyerjük, hogy $-8 = -4A$ azaz $A = 2$. $x = 2$-nél $40 = 8C$, innen $C = 5$. Végül $x = -2$-nél $-24 = 8B$, azaz $B = -3$, tehát

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2} \right) dx =$$
$$= 2\ln x - 3\ln(x+2) + 5\ln(x-2) + C.$$

A keresett megoldás:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + \ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3} + C.$$

4.68. Megoldás *Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a nevező négy különböző tényező szorzatára bontható. Ezután a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. De munkát takaríthatunk meg az $u = x^2$ helyettesítéssel. Ekkor ugyanis $du = 2xdx$ és*

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - 3u + 2} = \frac{1}{2} \ln\frac{u-2}{u-1} + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln\frac{x^2-2}{x^2-1} + C.$$

4.69. $\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$

4.70. Megoldás

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\,dx = \int \frac{4x-8+11}{(x-2)^3}\,dx = \int \left[\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3}\right] dx =$$

$$= -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C$$

4.71. Megoldás

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$

kifejezést $x-2$ polinomjaként felírva (pld. előállítjuk az

$$x_0 = 2$$

helyhez tartozó Taylor polinomját, lásd, 401. példát).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1$$

adódik, azaz

$$\int \frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4}\,dx = \int \frac{(x-2)^3-(x-2)+1}{(x-2)^4}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4}\right) dx =$$

=

$$\ln(x-2) + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C$$

(Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy a részlet-törtekre bontást a többszörös gyököknek megfelelően végeztük volna el

$$\frac{x^3-6x^2+11x-5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4}$$

alapján).

4.72. Megoldás *Többszörös gyökök esetén a gyöktényező a multiplicitásnak megfelelő számossággal szerepel a nevezőben az egytől a multiplicitásnak megfelelő hatványig. Elsőfokú gyöktényező esetén a számláló konstans.*

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{d}{x-2}+\frac{e}{(x-2)^2}.$$

Ugyanis ebben a példában a 0 *háromszoros,* 2 *pedig kétszeres gyök.*

$$x^3-2x^2+4\equiv$$

$$\equiv A(x^4-4x^3+4x^2)+B(x^3-4x^2+4x)+C(x^2-4x+4)+d(x^4-2x^3)+ex^3$$

$$\left.\begin{array}{l} A+d=0 \\ -4A+B-2d+e=1 \\ 4A-4B+C=-2 \\ 4B-4C=0 \\ 4C=4 \end{array}\right\} =$$

Egyenletrendszerből

$$A=\frac{1}{4},\quad B=1,\quad C=1,\quad d=-\frac{1}{4},\quad e=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{2(x-2)^2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C$$

4.73. Megoldás

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$$

4.74. Megoldás

$$\frac{1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Másodfokú gyöktényező esetén a számláló elsőfokú!

$$1\equiv A(x^5+x^3)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+D(x^2+1)+Ex^5+Fx^4$$

azonosságból írható fel az egyenletrendszer, melyből A, B, C, D, E *és* F *meghatározható.*

$$A+e=0$$

$$B + F = 0$$
$$A + C = 0$$
$$B + d = 0$$
$$C = 0 \quad A = 0 \quad E = 0$$
$$D = 1 \quad B = -1 \quad F = 1$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^4} = \int \left(\frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + arc\ tg\ x + C.$$

4.75. Megoldás

$$\frac{x}{x^3-1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} =$$
$$= \frac{A(x^2+x+1) + B(x^2-x) + C(x-1)}{x^3-1}$$
$$A + B = 0 \qquad A = \frac{1}{3} A - B + C = 1 \qquad B = -\frac{1}{3} A - C = 0 \qquad C = \frac{1}{3}$$
$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

4.76. Megoldás

$$\int \frac{x^2}{1-x^4} dx = \int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} dx = \int \frac{x^2}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} dx =$$
$$= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{1+x} - \frac{\frac{1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx =$$
$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

4.77. Megoldás

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+d}{x^2+1}$$

alapján végezzük a részlet-törtekre bontást és nyerjük:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)C$$

4.78. Megoldás *A nevező tényezőkre bontását a következőképpen végezhetjük el:*

$$1 + x^4 = 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^2 = (1+x^2)^2 - 2x^2 = (1+x^2)^2 - (\sqrt{2}\ x)^2 =$$

$$= (1 + x^2 + \sqrt{2}\ x)(1 + x^2 - \sqrt{2}\ x)$$

A rész törtekre való bontás vázlata

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Az eredmény:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}\ x+1}{x^2+\sqrt{2}\ x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\ x}{1-x^2} + C$$

4.79. Megoldás *A feladat első pillanatra azonos jellegű az előzővel. Meg is oldható annak alapján, de gondosabb vizsgálat után kiderül, hogy speciális tulajdonságai figyelembe vételével sokkal egyszerűbben is megoldható.*

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4} dx = \int \frac{x}{1+x^4} dx - \int \frac{x^3}{1+x^4} dx$$

Az első integrált

$$u = x^2$$

helyettesítéssel hozhatjuk még egyszerűbb alakra (lásd a 4.39. feladatot), a második pedig máris integrálható, mert a számláló a nevező deriváltjának a negyede.

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx - \int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$$

4.80. Megoldás *Többszörös komplex gyök esetén javasolható a* $\operatorname{tg} t$ *helyettesítés.*

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{9}+1\right)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left[(\frac{x}{3})^2+1\right]^3} =$$

$$= \frac{1}{729}\int \frac{3}{\left(tg^2 t+1\right)^3\cos^2 t}dt = \frac{1}{243}\int \frac{\cos^6 t}{\cos^2 t}dt = (*)$$

$$\frac{x}{3} = \operatorname{tg} t; \qquad dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt$$

$$(*) = \frac{1}{243}\int \cos^4 t dt = \frac{1}{243}\int \left(\frac{1+\cos^2 t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{243}\int \frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}dt =$$

$$= \frac{1}{972}\int (1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2})dt = \frac{1}{972}\left(t+\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{972}\left(\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+\frac{6x}{x^2+9}+\frac{3x(9-x^2)}{2(9+x^2)^2}\right)+C =$$

$$\frac{1}{648}\ arc\ tg\ \frac{x}{3}+\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+C$$

4.81. $\quad -\dfrac{1}{3(x-3)^3}+c.$

4.82. $\quad 2\ln|x-5|+c.$

4.83. $\quad \dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+27)+c.$

4.84. $\quad \dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+27)+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-3}{3\sqrt{2}}+c.$

4.85. $\quad \ln\dfrac{x^3(x-1)^2}{x+3}.$

4.86. Megoldás *Páratlan kitevő esetén helyettesítéssel oldhatjuk meg a feladatot.*

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x\cdot\cos(x)dx = \int (\cos^2 x)^2\cos(x)dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2\cos(x)dx = \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4)du = u-\frac{2u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+C =$$

$$= \sin(x)-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

$$u=\sin(x) \qquad du=\cos(x)dx$$

4.87. Megoldás *Páros kitevő esetén a linearizáló formula alkalmazását javasoljuk.*

$$\int \sin^6 x dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + 3\cdot\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

Az első integrálban újból alkalmaztuk a linearizáló formulát, így került

$$\cos^2 2x$$

helyébe

$$\frac{1+\cos 4x}{2}.$$

A második integrálban pedig már páratlan kitevőn szerepel trigonometrikus függvény, tehát az az előző példa mintájára megoldható.
Az eredmény:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$

4.88. Megoldás

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x \; dx = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos(x) \; dx = \int \sin^6 x \cdot (1 - \sin^2 x)\cdot \cos(x) dx =$$

$$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

$$= \int u^6(1-u^2)du = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

4.89. Megoldás

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x}dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \cos^2 x\right) dx =$$

$$= \operatorname{tg}(x) - \frac{3}{2}x + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

4.90. Megoldás

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin(x)}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-u^2}{u^4}du = \int \left(\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u^4}\right)du =$$

$$u = \cos(x) \qquad du = -\sin(x)dx$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos(x)} + C$$

4.91. Megoldás *Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítést, akkor*

$$\int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \int \frac{2}{2t+1-t^2}dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}-1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{2}-1} + C$$

4.92. Megoldás *Itt is válogathatunk a megoldási módszerek között. Alkalmazhatjuk a*

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{2}{1-t^2}dt = 2\cdot arth + C = \ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C = \ln\ \ tg\,(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) + C$$

De ugyanúgy használhatjuk fel a páratlan kitevőjű jellegét is.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos(x)}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{du}{1-u^2} = \ln\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} + C$$

Megfelelő átalakítások után az eredmény ugyanolyan alakra bontható:

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln\operatorname{tg}\,(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) + C.$$

4.93. Megoldás

$$\int \frac{dx}{5-3\cos(x)} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\,(2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + C.$$

4.94. Megoldás *Ha* $\sin(x)$*-nek és* $\cos(x)$*-nek csak páros kitevőjű hatványai és* $\mathrm{tg}\,(x)$ *fordulnak elő, akkor (bár a* $t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ *helyettesítés akkor is alkalmazható) előnyösebb a* $t = \mathrm{tg}\,(x)$ *helyettesítés alkalmazása.*

$$\int tg^5 x\ dx = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{1+t^2})dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = (*)$$

$$t = \mathrm{tg}\,(x) \quad x = arc\ tg\ t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$(*) = \frac{1}{4}\cdot tg^4 x - \frac{1}{2}\cdot tg^2 x - \ln\cdot\cos(x) + C.$$

4.95. Megoldás

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+tg^2 x}{tg^2 x}.$$

Tehát

$$t = \mathrm{tg}\,(x)$$

helyettesítés esetén

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x\cdot\cos^4 x} = \int \frac{(1+t^2)^2\cdot(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{3}{t^2} + 3 + t^2\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}\cdot\mathrm{ctg}^3 x - 3\cdot\mathrm{ctg}\,(x) + 3\cdot\mathrm{tg}\,(x) + \frac{1}{3}\cdot tg^3 x + C.$$

4.96. Megoldás

$$\int \frac{1+tg\ x}{\sin(2x)}\ dx = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{tg}\,(x) + \frac{1}{2}\cdot\ln\ \ tg\ x + C$$

4.97. Megoldás

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot arc\ tg\ (\sqrt{2}\ tg\ x) + C.$$

4.98. Megoldás

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{1+\mathrm{tg}\,(x)}{1-\mathrm{tg}\,(x)} + \frac{1}{2}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + C.$$

(A linearizáló formula segítségével $\cos(2x)$ *függvényeként írhatjuk fel az integrálandó függvényt. Ezáltal a feladat nagymértékben egyszerűsödik.)*

4.99. Megoldás

$$\int \sin 3x \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin(8x - \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cos(2x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{26}\cos(8x - \frac{\pi}{2}) + C.$$

4.100. Megoldás *Nem típus feladat, de*

$$\sin(x) = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

és

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$$

összefüggések felhasználásával egyszerű megoldást nyerünk.

$$\int \sqrt{1 + \sin(x)}dx = \int \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + 2\sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}}dx =$$

$$= \int (\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2})dx = 2 \cdot \sin\frac{x}{2} - 2 \cdot \cos\frac{x}{2} + C.$$

4.101. Megoldás *A hiperbolikus függvények integrálását sok esetben, - mint pl. most is - a trigonometrikus integrálhoz hasonlóan végezzük el. (Megemlítjük azonban, hogy a hiperbolikus függvények racionális függvényeinek az integrálása mindig visszavezethető e^x racionális függvényének az integrálására. A célszerűség dönti el, hogy mikor melyik utat választjuk.)*

$$\int sh^2x \cdot ch^3x\ dx = \int sh^2x \cdot (1 + sh^2x) \cdot ch\ x\ dx = \int u^2(1 + u^2)du = \int (u^2 + u^4)du = (*)$$

$$u = sh\ x; \qquad du = ch\ xdx$$

$$(*) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3}\ sh^3x + \frac{1}{5}\ sh^5x + C.$$

4.102. Megoldás

$$\int \frac{sh^3x}{\sqrt{ch\ x}}\ dx = \int \frac{(ch^2x - 1)sh\ x}{\sqrt{ch\ x}}\ dx = \int \frac{u^2 - 1}{\sqrt{u}}du = \frac{2}{5}\sqrt{ch^5x} - 2\sqrt{ch\ x} + C$$

$$u = ch\ x \qquad du = sh\ xdx.$$

4.103. Megoldás *A* $ch^2x - sh^2x = 1$ *aznonosság felhasználásávalazt kapjuk, hogy*

$$\int \frac{dx}{sh\ x \cdot ch\ x} = \int \frac{ch^2x - sh^2x}{sh\ x \cdot ch\ x} dx = \int \left(\frac{ch\ x}{sh\ x} - \frac{sh\ x}{ch\ x} \right) dx = \ln sh\ x - \ln ch\ x + C =$$

$$= \ln \frac{sh\ x}{ch\ x} + C = \ln\ \ th\ x + C.$$

4.104. Megoldás *Az előző példa alapján nagyon egyszerűen kapjuk az eredményt a következő átalakítás után:*

$$\int \frac{dx}{sh\ x} = \int \frac{dx}{2\ sh\ \frac{x}{2}\ ch\ \frac{x}{2}} = \ln\ \ th\ \frac{x}{2} + C.$$

Alternatív megoldás, ha sh x helyébe $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ *kifejezést írunk, vagy ha sh x-el való szorzás és osztás után* $\frac{sh\ x}{ch^2 - 1}$ *integrálására alkalmazzuk az* $u = ch\ x$ *helyettesítést.*

4.105. Megoldás

$$ch\ \alpha \cdot ch\beta = \frac{1}{2} \left[ch(\alpha + \beta) + ch(\alpha - \beta) \right]$$

összefüggés alapján

$$\int ch\ x \cdot ch\ 2x \cdot ch\ 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (ch\ 6x + ch\ 4x + ch\ 2x + 1) dx = \frac{1}{24}\ sh\ 6x + \frac{1}{16}\ sh\ 4x + \frac{1}{8}\ sh\ 2x + \frac{1}{4}x + C.$$

4.106. Megoldás

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\ dx = \int \frac{u^2}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1} du = \int (1 - \frac{1}{u+1}) du = u - \ln(u+1) + C = (*)$$

$$u = e^x \quad x = \ln u \quad dx = \frac{1}{u} du$$

$$(*) = e^x - \ln(e^x + 1) + C.$$

4.107. Megoldás

$$\int \frac{6}{e^x - 3}\ dx = \int \frac{6}{(u-3)u}\ du = \int \left(-\frac{2}{u} + \frac{2}{u-3} \right) du = 2 \ln \frac{e^x - 3}{e^x} + C$$

$$e^x = u \qquad x = \ln u \qquad dx = \frac{1}{u} du$$

4.108. Megoldás *A parciális integrálás alkalmazható, de a megoldás ilyen módon sokkal hosszabb, mintha sh* $3x$*-et* e^x*-el fejezzük ki, ezért ezt a megoldást ajánljuk hasonló esetekben is.*

$$\int e^x \cdot \ sh\ 3x\ dx = \int e^x \cdot \frac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} dx = \int \frac{e^{4x} - e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{8}\ e^{4x} + \frac{1}{4}\ e^{-2x} + C.$$

4.109. $\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2} - x\right) + c.$

4.110. Megoldás

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\ dx = \int \frac{\frac{u^2-5}{3}}{u} \cdot \frac{2}{3} u\, du = \frac{2}{9} \int (u^2 - 5) du = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3} - 5u\right) + C = (*)$$

$$u = \sqrt{3x+5}\ ; \qquad 3x + 5 = u^2\ ; \qquad x = \frac{u^2 - 5}{3}\ ; \qquad dx = \frac{2}{3} u\, du$$

$$(*) = \frac{2}{27}\sqrt{(3x+5)^3} - \frac{10}{9}\sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{27}\sqrt{3x+5} \cdot (3x - 10) + C.$$

4.111. Megoldás

$$\int (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{2x-1}\ dx = \int \left(\frac{u^4 + 2u^2 + 1}{4} - 3 \cdot \frac{u^2+1}{2} + 2\right) u \cdot u\, du = (*)$$

$$u = \sqrt{2x-1}\ ; \qquad u^2 = 2x - 1\ ; \qquad x = \frac{u^2+1}{2}\ ; \qquad dx = u\, du$$

$$(*) = \frac{1}{4}\int (u^6 - 4u^4 + 3u^2) du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7} - \frac{4u^5}{5} + u^3\right) + C =$$

$$= \frac{1}{28}\sqrt{(2x-1)^7} - \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5} + \frac{1}{4}\sqrt{(2x-1)^3} + C.$$

4.112. Megoldás *A feladatot kisebb lépésekben kétszeri helyettesítéssel is megoldhatjuk. Előbb* $e^x = t$*, majd pedig* $u = \sqrt{t+1}$ *helyettesítést alkalmazva racionális törtfüggvény integrálására vezetjük vissza.*

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}} = \int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{t+1}} = \int \frac{2u}{(u^2 - 1)u} du = 2 \int \frac{du}{u^2 - 1} =$$

$$= -2\ arth\ u + C = -\ln \frac{1+u}{1-u} + C =$$

$$t = e^x \ ; \quad x = \ln t \ ; \quad dx = \frac{1}{t} dt; \quad u = \sqrt{t+1} \ ; \quad t = u^2 - 1 \ ; \quad dt = 2u\, du$$

$$= \ln \frac{1-u}{1+u} + C = \ln \frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}} + C$$

Természetesen rövidebb lesz a megoldás (és azért általában így is járunk el), ha a két helyettesítést összevonva egy megfelelő helyettesítést alkalmazunk.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u}{u(u^2-1)} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1}$$

(A folytatás azonos.)

$$\sqrt{e^x+1} = u \qquad e^x = u^2 - 1 \qquad x = \ln(u^2-1) \qquad dx = \frac{2u}{u^2-1} du.$$

4.113. Megoldás

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{u^4}{1+u^3} \cdot 6u^5 du =$$

$$x = u^6 \qquad dx = 6u^5 du \qquad u = \sqrt[6]{x}.$$

A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse lesz a helyettesítendő kifejezés gyökkitevője.

$$6 \int \frac{u^9}{u^3+1} du = 6 \int \left(u^6 - u^3 + 1 - \frac{1}{u^3+1} \right) du =$$

$$\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[6]{x^4} + 6\sqrt[6]{x} - 2\ln(\sqrt[6]{x} + 1) +$$

$$+ \ln \left(\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1 \right) - 2\sqrt{3}\ arc\ tg\ \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{\ln \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1}{\ln \sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 1} -$$

$$-2\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

4.114. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} = \int \frac{4u^3}{u^2+u} du = 4 \int \frac{u^2}{u+1} du = 4 \int (u - 1 + \frac{1}{u+1}) du =$$

$$2u^2 - 4u + 4\ln(u+1) + C =$$

$$x = u^4 \qquad dx = 4u^3 du$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x} + 1) + C.$$

4.115. Megoldás

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x} = -\int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} du = -4 \int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)} du =$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{0 \cdot u + 2}{u^2+1} \right) du = (*)$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u \; ; \qquad \frac{1-x}{1+x} = u^2 \; ; \qquad x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \; ; \qquad dx = \frac{-4u}{(1+u^2)^2} du$$

$$(*) = \ln(u-1) - \ln(u+1) + 2 \operatorname{arc\,tg} u + C = \ln \frac{u-1}{u+1} + 2 \operatorname{arc\,tg} u + C =$$

$$= \ln \frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + 1} + 2 \; arc \; tg \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C = \ln \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} + 2 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

4.116. Megoldás *$x^2 = t$ helyettesítéssel a gyökjel alatt már lineáris kifejezés lesz, tehát így sikerült a feladatot az előzőkben tárgyalt típusra visszavezetni. Az eljárás azért alkalmazható a jelen esetben, mert a számlálóban $x^3 dx$ áll, ami így írható $x^2 \cdot x dx$. Itt x^2 helyébe t, $x dx$ helyébe pedig $\frac{1}{2} dt$ írható.*
Gyakorlásként oldjuk meg a feladatot ilyen bontásban is. Tekintettel azonban arra, hogy az így nyert integrált egy újabb helyettesítéssel racionalizáljuk, joggal merül fel az az igény, hogy lehetőleg egyetlen helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Ez lehetséges

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{8} \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{8} \int \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}} \right) du =$$

$$1 + 2x^2 = u \qquad du = 4x dx \qquad x^2 = \frac{u-1}{2}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{2}{3} \sqrt{u^3} - 2\sqrt{u} \right) + C = \frac{1}{6} \sqrt{1+2x^2} \cdot (x^2 - 1) + C.$$

4.117. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2 + 1}} = \frac{1}{3} \; arsh \; (3x-1) + C.$$

4.118. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(9x^2 - 12x + 2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(3x-2)^2 - 4 + 2\right]}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\ arc\sin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3}\ arc\sin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C.$$

4.119. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(3x-2)^2}}$$

A gyökjel alatti kifejezés az $x = \dfrac{2}{3}$ *hely kivételével (amikor is* 0*) mindenütt negatív, ezért belőle négyzetgyök nem vonható. Az integrálandó függvény tehát sehol nincs értelmezve (még az* $x = \dfrac{2}{3}$ *helyen sem, mert ott a nevező* 0*).*

4.120. Megoldás

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-(x^2-2x)}dx = \int \sqrt{1-[(x-1)^2-1]}dx =$$

$$= \int \sqrt{2-(x-1)^2}dx = \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}dx =$$

$$\sqrt{2} \int \sqrt{1-\sin^2 u}\sqrt{2}\cos u du = 2 \cdot \int \cos u \cdot \cos u\, du =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u\ ; \qquad x = \sqrt{2}\sin u + 1\ ; \qquad dx = \sqrt{2}\cos u du$$

$$= 2 \cdot \int \cos^2 u\, du = 2 \cdot \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = u + \frac{1}{2}\sin 2u + C$$

A visszahelyettesítéshez egyrészt

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u$$

kifejezésből felírjuk, hogy

$$u = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}},$$

másrészt $\sin 2u$*-t kifejezzük* $\sin u$*-val, mert* $\sin u$ *helyébe* $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ *írható*

$$\frac{1}{2}\sin 2u = \sin u \cdot \cos u = \sin u \cdot \sqrt{1-\sin^2 u} =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{2}}$$

tehát

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx = \arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + C.$$

4.121. Megoldás

$$\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx = \sqrt{3}\cdot\int\sqrt{x^2-x+\frac{1}{3}}dx = \sqrt{3}\cdot\int\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}dx =$$

$$= \int\sqrt{\left(\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int\sqrt{(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+1}dx = (*)$$

$$2\sqrt{3}x-\sqrt{3} = sh\ t\ ; \qquad x = \frac{sh\ t+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\ ; \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot ch\ tdt$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int\sqrt{sh^2t+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot ch\ tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int ch^2tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int\frac{ch\ 2t+1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(\frac{sh\ 2t}{2}+t\right)+C = \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(sh\ t\cdot\sqrt{1+sh^2t}+t\right)+C =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}(2x-1)\sqrt{1+3(2x-1)^2}+arsh\ \sqrt{3}\cdot(2x-1)\right]+C =$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{12x^2-12x+4}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ arsh\ \sqrt{3}\cdot(2x-1)+C =$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{3x^2-3x+1}+\frac{1}{8\sqrt{3}}\ arsh\ \sqrt{3}\cdot(2x-1)+C.$$

4.122. Megoldás

$$\int\sqrt{x^2+6x+10}\ dx = \frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x+10}+\frac{1}{2}\ arsh\ (x+3)+C.$$

4.123. Megoldás

$$\int\sqrt{3-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{3-x^2}+\frac{1}{2}\ arc\sin\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

4.124. Megoldás

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+40}} = arsh\ \frac{x-2}{6}+C.$$

4.125. Megoldás

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ arsh\ \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

4.126. Megoldás

$$\int \sqrt{2x^2+8x+5}dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{2x^2+8x+5} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ arch\ \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2)\right] + C$$

4.127. Megoldás

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4+x-x^2}}dx = \frac{31}{8}\ arc\sin\frac{2x-1}{\sqrt{17}} - \frac{2x+7}{4}\sqrt{4+x-x^2} + C.$$

4.2.2. Határozott integrálok. Vegyes feladatok

4.128. $\frac{13}{6}$.

4.129. $\frac{\pi}{12}$.

4.130. $\frac{1}{35}$.

4.131. $\frac{e^2-1}{2}$.

4.132. $\frac{\pi}{4}$.

4.133. $\frac{4}{3}$.

4.134. $-\frac{4}{15}$.

4.135. $\ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - \ln\operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})$.

4.136. $\frac{8}{7}$.

4.137. $\frac{\pi}{8}$.

4.138. $-\dfrac{4}{9}$.

4.139. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$.

4.140. 1.

4.141. $\dfrac{\pi}{4}$.

4.142. $\dfrac{\pi}{12}$.

4.143. $\dfrac{66}{25}$.

4.144. e^2+1.

4.145. $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

4.146. 0.

4.147. $\dfrac{25}{4e^2}+\dfrac{13}{4}$

4.148.

$$\frac{a}{(\ln a)^3}\left[(\ln a)^2-2\ln a+2\right]-\frac{2}{(\ln a)^3}$$

4.2.3. Improprius integrálok

4.149. Megoldás

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \frac{1}{x^2}=\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^\omega=\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{\omega}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

4.150. Megoldás

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}(\ln\omega-\ln 1).$$

Mivel $\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega=\infty$, *ezért a fenti integrál divergens.*

4.151. $\dfrac{\pi}{2}$.

4.152. 5π.

4.153. $-\frac{4}{e^3}$.

4.154. $9e^{10}$.

4.155. *Divergens.*

4.156. $\frac{1}{36}$.

4.157. *Divergens.*

4.158. $\frac{1}{2e}$.

4.159. $\sqrt{2}$.

4.160. 1.

4.161. Megoldás

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon + \ln 1)$$

tehát divergens.

4.162. Megoldás

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{\varepsilon} + 2) = 2.$$

4.163. Megoldás

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{2}\ln 1),$$

tehát az integrál divergens.

4.164. 1.

4.165. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$

4.166. $\frac{\pi}{2}.$

4.167. $\frac{2\sqrt{11}}{3}.$

4.168. $-\frac{\pi}{4}.$

4.169. $\frac{1}{24}(10\pi - 3\sqrt{3}).$

4.170. 1.

4.171. *Nem konvergens.*

4.172. $\pi.$

4.173. $2\sqrt{3}.$

4.174. $\frac{1}{a}.$

4.175. $\frac{1}{a^2}$

4.176. $\frac{1}{2}.$

4.177. 1.

4.178. $\frac{a}{a^2+b^2}.$

4.179. $\frac{1}{2}.$

4.180. $\frac{n!}{a^n}.$

4.2.4. Az integrálszámítás alkalmazásai

4.181. 8

4.182. $\frac{46}{9}$

4.183. $\frac{2}{3}$

4.184. $\frac{81}{4}$

4.185. $\frac{163}{4}$

4.186. $\frac{49}{20}$

4.187. $\frac{e^3-1}{2e} \approx 3.5106$

4.188. Megoldás

$$T = \int_0^{0,3} \sin 3x \; dx = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{0,3} = \frac{1}{3} \cdot (1 - \cos 0,9) \approx 0.1261$$

4.189. $\frac{2}{3} \cdot \sin 1.5 \approx 0.665$

4.190. 2

4.191. $\frac{1}{2} \operatorname{sh} 6 \approx 100.86$

4.192. $\operatorname{ch} 2 - 1 \approx 2.762$

4.193. $2 \ln 2 \approx 1.386$

4.194. $\ln 2$

4.195. $\frac{1}{2} \ln 3$

4.196. $\frac{1}{2} \ln 3$

4.197. $x = 1$

4.198. $x = -\dfrac{1}{2}\ln(6 + e^{-2}) \approx -0.9070$

4.199. $x = \arccos\dfrac{3}{4} \approx 0.7227$

4.200. $\dfrac{4}{3}$

4.201. $\dfrac{4}{3}$

4.202. *A metszéspontok abszcisszái:* $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$T = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - x^2) - x^2 \; dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428$$

4.203. $\dfrac{2}{3}$

4.204. $\dfrac{9}{2}$

4.205. $\dfrac{125}{18}$

4.206. 0.49

4.207. 0.45

4.208. $\dfrac{1}{3}$

4.209. $\dfrac{2}{3}$

4.210. 1.12

4.211. 4.29

4.212. $\ln a$

4.213. $\frac{1}{4}\left(8\sqrt{65}-2\sqrt{5}+\text{ar sh}\,8-\text{ar sh}\,2\right)$

4.214. $\text{sh}\,3 \approx 10.02$

4.215. $\sqrt{37}-\sqrt{5}-\text{ar sh}\,\frac{1}{6}+\text{ar sh}\,\frac{1}{2} \approx 4.49$

4.216. 1.32

4.217. $\frac{5\pi}{2}$

4.218. $\frac{5\pi}{2}$

4.219. $8a$

4.220. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

4.221. 63.3

4.222.

$$V=\pi\int_0^2 e^{4x}\,dx=\pi\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^2=\frac{\pi}{4}\left(e^8-1\right)$$

4.223. $\pi\cdot\ln 4$

4.224. $\frac{127\pi}{63}$

4.225. $\frac{16\pi}{3}$

4.226. $\frac{16\pi}{15}$

4.227. 12π

4.228. $\frac{\pi}{15}$

4.229. Megoldás

$$V=\pi\int_0^\pi \cos^4 x\,dx=\pi\int_0^\pi\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2\,dx=\frac{\pi}{4}\int_0^\pi 1+2\cos(2x)+\frac{1+\cos 4x}{2}\,dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[x+\sin 2x\right]_0^\pi+\frac{\pi}{8}\left[x+\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi=\frac{3\pi^2}{8}$$

4.230. 6π

4.231. $\frac{4}{3}ab^2\pi$

5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Differenciálegyenletek

5.1.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

5.1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket, és ábrázoljunk néhány megoldást.

a) $y' = x$.

b) $y' = y$.

c) $y' = xy$.

5.2. Határozzuk meg a

$$\sin(x)\cos^3(x) + (\cos(x)+1)\sin(y)y' = 0$$

differenciálegyenletnek a $P\left(2\pi, \frac{\pi}{4}\right)$ ponton átmenő partikuláris megoldását.

Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenleteket.

5.3. $y^2 - 1 = (2y + xy)y'$.

5.4. $xy' + y = y^2$.

5.5. $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'$.

5.6. $xy + \sqrt{1-x^2}\, y' = 0$.

5.7. $(x + xy^2)\, y' - 3 = 0$.

5.8. $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2}y'$.

5.9. $\sqrt{1-y^2} = (1-x^2)\, y'$.

5.10. $\sin(y) = e^x\, y'$.

5.11. $(1+x^2)\, y' = \sqrt{1-y^2}$.

5.12. $x(1+y^2) + (1+x^2)\, y' = 0$.

5.13. $xy\, y' - (1-y^2) = 0$.

5.14. $y(4+9x^2) = \frac{1}{y'}$.

5.15. $\sin(x)y' = \sin(y)$.

5.16. $(2x+1)y' + y^2 = 0.$

5.17. $(1+2y)x + (1+x^2)y' = 0.$

5.18. $y' \sin(x)\sin(y) + 5\cos(x)\cos^3(y) = 0.$

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, mely az adott kezdeti feltételeket kielégíti.

5.19.

$$\frac{yy'}{1+x} = \frac{x}{1+y};$$

a) $y(1) = 1$ b) $y(0) = 1$

5.20. $y'\sin(x) = y\ln(y), \quad y(0) = 1.$

5.21. $yy' = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y(1) = 1.$

5.22. $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}y' = 0, \quad y(0) = 1.$

5.23. $2y = y', \quad y(0) = 1.$

5.24. $y\ln(y) + xy' = 0, \quad y(1) = 1.$

$\boxed{\textbf{5.25.}}$ Határozzuk annak a görbeseregnek az egyenletét, melyben mindegyik görbéjére fennáll a következő tulajdonság: bármely (x, y) koordinátájú P pontjához tartozó normálisának az x tengelyig terjedő darabja ugyanakkora, mint a P pontnak az origótól mért távolsága.

$\boxed{\textbf{5.26.}}$ Mi az egyenlete annak a görbének, melyben a görbe alatti terület az a és x abszcisszájú pontok között arányos a pontok közötti görbék hosszával?

5.27. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél a szubtangens hosszúsága egy rögzített a állandóval egyenlő.

5.28. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél a szubnormális állandó.

5.1.2. Lineáris differenciálegyenletek

$\boxed{\textbf{5.29.}}$ Oldjuk meg az

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

$\boxed{\textbf{5.30.}}$ Határozzuk meg az

$$y' = \frac{1}{\sin(x)}y + \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg a $P\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ponton áthaladó partikuláris megoldást.

$\boxed{\textbf{5.31.}}$ Írjuk fel az

$$\frac{1}{x}y' = -y + 1$$

differenciálegyenletnek a $P(0, 7)$ ponton átmenő megoldását.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

5.32. $y' = xy + x^3.$

5.33. $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1.$

5.34. $y' - \frac{2}{x}y = x^2 e^x.$

5.35. $(x^2 - 1)y' = xy + x^2.$

5.36. $y' + y \operatorname{tg}(x) = \sin(2x).$

5.37. $y'y + \operatorname{th} x = 6e^{2x}.$

5.38. $y' \cos(x) - 3y \sin(x) = \operatorname{ctg}(x).$

5.39. $xy' + 2y = x^4.$

5.40. $y' + y = \sin(2x).$

5.41. $y'x \ln(x) - y = x^2(2\ln(x) - 1).$

5.42. $y' \sin(x) - y \cos(x) = e^x \sin^2(x).$

5.43. $xy' + y = x \ln|x|.$

Számítsuk ki az alábbi differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldását:

5.44. $xy' + 2y = 3x, \qquad y(1) = 1.$

5.45. $(1 - x^2)y' + xy = 1, \qquad y(0) = 1.$

5.46. $y' + 2xy = 3xe^{-x^2}, \qquad y\left(\sqrt{\ln 2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \ln 2).$

5.47. $y' + y\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x), \qquad y(0) = 1.$

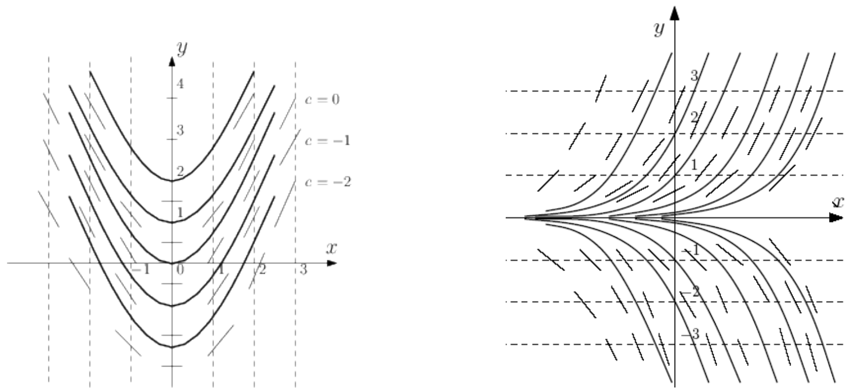
5.48. $y' + x^2y = x^2, \qquad y(2) = 1.$

5.49. $xy' + y + xe^x = 0, \qquad y(1) = 0.$

5.2. Differenciálegyenletek. Megoldások

5.2.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

5.1. a) A differenciálegyenlet általános megoldása az $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ görbesereg.
A megoldásfüggvények grafikonja (az ún. integrálgörbék) olyan parabolák, melyek tengelye az y tengellyel esik egybe.



5.1. ábra. 5.1. feladat a) és b) rész

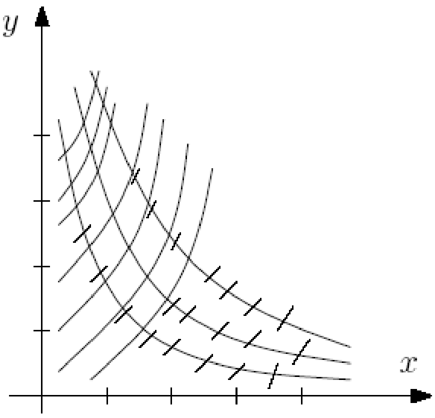
c) Az általános megoldás: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$.
Néhány integrál görbe grafikonja:

5.2. A változókat szétválasztva:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)} dy = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1} dx + c$$

Az egyenlőség jobboldalán álló integrálban a számláló a nevező deriváltja, ezért:

$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1} dx + \ln C = \ln C(\cos(x)+1).$$



5.2. ábra. 5.1 feladat

A baloldalon $u = \cos(y)$ helyettesítéssel számolunk. Ekkor $du = -\sin(y)dy$, s így:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = -\int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\cos^2(y)}.$$

Innen a számolás lépései:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cos^2(y)} &= \ln C(\cos(x)+1) \\
2\cos^2(y) &= \frac{1}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
1+\cos(2y) &= \frac{1}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
\cos(2y) &= \frac{1-\ln C(\cos(x)+1)}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
y &= \frac{1}{2}\cdot \arccos\left(\frac{1-\ln C(\cos(x)+1)}{\ln C(\cos(x)+1)}\right)
\end{aligned}$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Válasszuk ki ezek közül a keresett partikuláris megoldást!

Mivel $P\left(2\pi, \frac{\pi}{4}\right)$ ponton áthaladó megoldást keresük, $y(2\pi) = \frac{\pi}{4}$ kell legyen.

$$\frac{\pi}{2} = \arccos\cdot\frac{1-\ln 2C}{\ln 2C}.$$

Azaz:
$$\frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{1-\ln 2C}{\ln 2C}\right).$$
Az egyenlőség mindkét oldalának cosinusát véve:
$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1-\ln 2C}{\ln 2C} = 0,$$
innen:
$$\begin{aligned} 1-\ln 2C &= 0 \\ 1 &= \ln 2C \\ e &= 2C \end{aligned}$$
azaz $C = \dfrac{e}{2}$ és így
$$y = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\frac{1}{2}\ln(\cos(x)+1)}{\frac{1}{2}\ln(\cos(x)+1)}\right)$$

5.3. $y^2 - 1 = C(x+2)^2, \quad y = \pm 1.$

5.4. $y = \dfrac{1}{1-Cx}, \quad y = 0,\ y = 1.$

5.5. $C(y+1) = x(x-2), \quad y = -1.$

5.6. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = 0.$

5.7. $3y + y^3 = 9\ln Cx.$

5.8. $y = \sin(\operatorname{sh}^{-1} x + C), \quad y = \pm 1.$

5.9. $y = \sin(\operatorname{th}^{-1} x + C), \quad y = \pm 1,\ x = \pm 1.$

5.10. $x = -\ln\left(-\ln C \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right), \quad y = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.11. $y = \sin(\arctan x + C), \qquad y = \pm 1.$

5.12. $y = \operatorname{tg}\left(\ln\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}\right).$

5.13. $y = \dfrac{1}{Cx}\cdot\sqrt{C^2x^2 - 1}.$

5.14. $3y^2 = \arctan\dfrac{3x}{2} + C.$

5.15. $y = 2\arctan\left(C + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right), \quad , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.16. $y = \dfrac{1}{\ln C\sqrt{2x+1}}, \quad y = 0$

5.17. $y = \dfrac{C}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$

5.18. $\dfrac{1}{\cos^2 y} = -10 \ln \sin(x) + C$

5.19.
1. a.) $y = x$
2. b.) $2\left(x^3 - y^3\right) + 3\left(x^2 - y^2\right) + 5 = 0$

5.20. $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

5.21. $y^2 - 1 = 2\ln\left(e^x + 1\right) - 2\ln(e+1)$.

5.22. $\left(1 - x^2\right)^{3/2} + \left(1 - y^2\right)^{3/2} = 1$

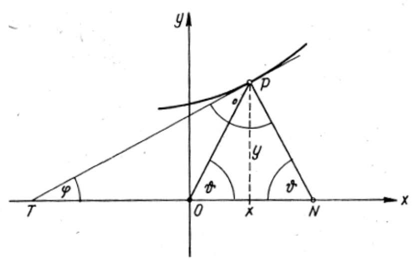
5.23. $y = e^{2x}$

5.24. $y = 1$

5.25. A feladatnak megfelelő ábrából leolvasható, de az adott feltételekből is következik, hogy:

$$\overline{OP} = \overline{PN} \text{ és } \overline{PN} \perp \overline{PT}.$$

Tehát



5.3. ábra. 5.25 feladat

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \cot\vartheta.$$

Másrészt:

$$\cot\vartheta = \frac{x}{y}.$$

Ezek felhasználásával a görbesereg differenciálegyenlete:

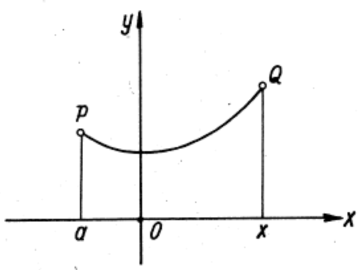
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$y^2 - x^2 = C.$$

Az integrálgörbék olyan hiperbolák, melyeknek valós tengelye az y tengely.

5.26. Legyen $\widehat{PQ}$ a görbe íve az a és x abszcisszák között. A görbe alatti terület



5.4. ábra. 5.26 feladat

$$\int_a^x y(t)dt,$$

az ívhossz pedig

$$\int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}dt.$$

Ha a görbe alatti terület arámyos az ívhosszal, akkor fennáll:

$$\int_a^x y(t)dt = k\int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}dt.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát x szerint differenciálva, az

$$y(x) = k\sqrt{1+[y'(t)]^2} \text{ ill. } y' = \pm\frac{1}{k}\sqrt{y^2-k^2}$$

differenciálegyenlethez jutunk.

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\begin{aligned}\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} &= \pm\frac{1}{k}\int dx \\ \cosh^{-1}\frac{y}{k} &= \pm\frac{x+C}{k}\end{aligned}$$

Megoldva y-ra:

$$y = k\cosh\frac{x+C}{k}.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása, ezenkívül partikuláris megoldás az $\sqrt{y^2-k^2}=0$ egyenletből adódó $y=\pm k$ is.

5.27. $y = Ce^{\frac{x}{a}}$

5.28. $y^2 = 2p(x+C)$

5.2.2. Lineáris differenciálegyenletek

5.29. Az $y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$ differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$Y' = -2xY.$$

Ezt a változók szétválasztásával oldjuk meg:

$$\begin{aligned}\int\frac{dY}{Y} &= -2\int x dx \\ \ln Y &= -x^2 + \ln C\end{aligned}$$

azaz $\ln\frac{Y}{C} = -x^2$.

A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = Ce^{-x^2}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálása módszerével állítjuk elő:

$$y_0 = C(x)\cdot e^{-x^2} \qquad y_0' = [C'(x) - 2x\cdot C(x)]\,e^{-x^2}$$

Behelyettesítük az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$\left[C'(x) - 2x \cdot C(x)\right] e^{-x^2} = \left[-2x \cdot C(x)\right] e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}$$

Innen:

$$C'(x)e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2},$$

ezután szorzunk az e^{x^2} kifejezéssel: $C'(x) = 2x$. Az egyenlőség mindkét oldalát integrálva $C = x^2$, így:

$$y_0(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}.$$

A keresett általános megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege:

$$y(x) = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}.$$

5.30. $y' = \dfrac{1}{\sin(x)} y + \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$

A homogén egyenlet megoldása: $Y' = \dfrac{1}{\sin(x)} Y$

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{Y} &= \frac{1}{\sin(x)} dx \\
\int \frac{dY}{Y} &= \int \frac{1}{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} dx \\
\ln Y &= \ln\left(C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y(x) = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása állandók variálásával:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= C(x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\
y_0'(x) &= C'(x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{C(x)}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$C' \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{C}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin(x)} \cdot C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

Mivel
$$C'(x)\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$
tehát
$$\begin{aligned} C'(x) &= 1,\ \text{azaz } C(x)=x. \\ y_0(x) &= x\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \end{aligned}$$
A differenciálegyenlet általános megoldása:
$$y(x)=(C+x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$
$P\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ponton áthaladó megoldást úgy kaphatunk, ha az általános megoldásban a C állandót megfelelő módon határozzuk meg:
$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi=\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=C+\frac{\pi}{2}.$$
Innen: $C=\frac{\pi}{2}$.

Tehát a partikuláris megoldás:
$$y(x)=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

5.31. Feladatunk az $\frac{1}{x}y'=-y+1$ differenciálegyenletnek az $y(0)=7$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának meghatározása.

A feladatot az $y'=a(x)y+b(x)$ egyenlet megoldására levezetett
$$y(x)=e^{\int a(x)dx}[c+\int b(x)e^{\int a(x)dx dx}]$$
képlettel oldjuk meg.

Előbb azonban az egyenletet y' együtthatójával el kell osztani:
$$y'=-xy+x.$$
Innen
$$y(x)=e^{-\int xdx}[c+\int xe^{\int xdx}dx]=$$
$$=e^{-\frac{x^2}{2}}[c+\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx]=$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}[c+e^{\frac{x^2}{2}}]$$

Tehát

$$y(x)=ce^{-\frac{x^2}{2}}+1$$

A $P(0,7)$ ponton átmenő megoldást a $7=ce^0+1$ egyenletből kapjuk, $c=6$, így

$$y_0(x)=6e^{-\frac{x^2}{2}}+1.$$

5.32. $y(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}-(x^2+2)$.

5.33. $y(x)=\sin(x)+C\cos(x)$.

5.34. $y(x)=x^2(e^x+C)$.

5.35. $y(x)=\sqrt{x^2-1}\left[C+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right]-x$.

5.36. $y(x)=C\cos(x)-2\cos^2(x)$.

5.37. $y(x)\cdot\operatorname{ch}x=3e^x+e^{3x}+C$.

5.38. $y(x)=\dfrac{C+\ln\sin(x)}{\cos^3 x}+\dfrac{1}{2\cos(x)}$.

5.39. $y(x)=\dfrac{x^4}{6}+\dfrac{C}{x^2}$.

5.40. $y(x)=Ce^{-x}+\dfrac{1}{5}\sin(2x)-\dfrac{2}{5}\cos(2x)$.

5.41. $y(x)=C\ln x+x^2$.

5.42. $y(x)=(C+e^x)\sin(x)$.

5.43. $y(x)=\dfrac{C}{x}+\dfrac{1}{2}x\ln|x|-\dfrac{1}{4}x$.

5.44. $y(x)=x$.

5.45. $y(x)=x+\sqrt{1-x^2}$.

5.46. $y(x)=(x^2+1)\,e^{-x^2}$.

5.47. $y(x)=2e^{-\sin(x)}+\sin(x)-1$.

5.48. $y(x)=1$.

5.49. $y(x)=e^x\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$.