Tartalomjegyzék

4. fejezet

Integrálszámítás

4.1. Integrálszámítás

4.1.1. Határozatlan integrál

Elemi függvények

4.1. $\displaystyle\int \frac{1}{x+1} dx$

$\boxed{\textbf{4.2.}}$ $\displaystyle\int \frac{x}{x+1} dx$

4.3. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$

4.4. $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)\, dx$

$\boxed{\textbf{4.5.}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2}$

$\boxed{\textbf{4.6.}}$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

$\boxed{\textbf{4.7.}}$ $\displaystyle\int x^2\left(x^2-1\right) dx$

$\boxed{\textbf{4.8.}}$ $\displaystyle\int \left(x^2-1\right)^2 dx$

$\boxed{\textbf{4.9.}}$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}\, dx$

4.10. $\displaystyle\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

$\boxed{\textbf{4.11.}}$ $\displaystyle\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$

4.12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

4.13. $\displaystyle\int \frac{x^2-4x+7}{x-2}\, dx$

$\boxed{\textbf{4.14.}}$ $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\, dx$

$\boxed{\textbf{4.15.}}$ $\displaystyle\int \frac{6}{5+5x^2}\, dx$

$\boxed{\textbf{4.16.}}$ $\displaystyle\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\, dx$

4.17. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$

$\boxed{\textbf{4.18.}}$ $\displaystyle\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}\, dx$

4.19. $\displaystyle\int 3x^5 dx$

4.20. $\displaystyle\int \frac{x^2-7x+8}{x^2} dx$

Helyettesítés

$\boxed{\textbf{4.21.}}$

$$\int e^{-x}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.22.}}$

$$\int \cos(4x-5)\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.23.}}$

$$\int \sqrt{8-2x}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.24.}}$

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.25.}}$

$$\int 10^x \cdot e^x \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.26.}}$

$$\int \frac{dx}{5+x^2}$$

$\boxed{\textbf{4.27.}}$

$$\int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}} \; dx$$

4.28.

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$$

4.29.

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.30.}}$

$$\int x\sqrt{1-x^2} \; dx$$

4.31.

$$\int x^2 \sqrt[3]{x^3+8} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.32.}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.33.}}$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.34.}}$

$$\int x\sin(x^2+2) \; dx$$

4.35.

$$\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}\, x}}{\cos^2(x)} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.36.}}$

$$\int \frac{x}{4+x^2} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.37.}}$

$$\int \frac{dx}{x\ln x}$$

$\boxed{\textbf{4.38.}}$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.39.}}$

$$\int \frac{x+2}{2x-1} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.40.}}$

$$\int \frac{x^4}{1-x} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.41.}}$

$$\int \frac{x}{x^4+1} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.42.}}$

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \; dx$$

4.43.

$$\int \frac{x^7}{\sqrt{x^8-1}}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.44.}}$

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\ dx$$

4.45.

$$\int \sin(8x) dx$$

4.46.

$$\int \frac{1}{3x-5} dx$$

4.47.

$$\int e^{5x+7} dx$$

4.48.

$$\int \sin^3(x)\cos(x) dx$$

4.49.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{1-x^3}} dx$$

4.50.

$$\int \operatorname{tg} x dx$$

4.51.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x}+1)} dx$$

Parciális integrálás

4.52.

$$\int (x^2-1)\sin(3x)\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.53.}}$

$$\int \left(\frac{x+2}{e^x}\right)^2\ dx$$

4.54.

$$\int x^2 2^x\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.55.}}$

$$\int x^3 e^{-x^2}\ dx$$

4.56.

$$\int \sin\sqrt{x}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.57.}}$

$$\int x\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\ dx$$

4.58.

$$\int x^2 \cdot \cos^2 x \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.59.}}$

$$\int x \cdot \text{ arc tg } x \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.60.}}$

$$\int \text{ arc tg} \sqrt{x} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.61.}}$

$$\int \ln^3 x \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.62.}}$

$$\int (\arcsin(x))^2 \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.63.}}$

$$\int e^{3x} \cos(2x) \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.64.}}$

$$\int e^{\arcsin(x)} \, dx$$

Racionális törtfüggvények

$\boxed{\textbf{4.65.}}$

$$\int \frac{x-2}{x^2 - 7x + 12} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.66.}}$

$$\int \frac{3x-2}{x^2 + 4x + 8} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.67.}}$

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.68.}}$

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} \, dx$$

4.69.

$$\int \frac{2x^2 - 5}{x^4 - 5x^2 + 6} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.70.}}$

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.71.}}$

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.72.}}$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3(x-2)^2} \, dx$$

$\boxed{\textbf{4.73.}}$

$$\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$$

$\boxed{\textbf{4.74.}}$

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^4}$$

$\boxed{\textbf{4.75.}}$

$$\int \frac{x}{x^3 - 1}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.76.}}$

$$\int \frac{x^2}{1 - x^4}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.77.}}$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$\boxed{\textbf{4.78.}}$

$$\int \frac{1}{1 + x^4}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.79.}}$

$$\int \frac{x(1 - x^2)}{1 + x^4}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.80.}}$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$$

4.81.

$$\int \frac{1}{(x-3)^4} dx$$

4.82.

$$\int \frac{2}{x - 5} dx$$

4.83.

$$\int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 27} dx$$

4.84.

$$\int \frac{x - 1}{x^2 - 6x + 27} dx$$

4.85.

$$\int \frac{4x^2 + 13x - 9}{x^3 + 2x^2 - 3x} dx$$

Trigonometrikus függvények

$\boxed{\textbf{4.86.}}$

$$\int \cos^5 x\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.87.}}$

$$\int \sin^6 x\ dx$$

4.88.

$$\int \sin^6(x)\cos^3(x)\ dx$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\ dx$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}\ dx$$

4.91.

$$\int \frac{dx}{\sin(x)+\cos(x)}$$

4.92.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)}$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5-3\cos(x)}$$

4.94.

$$\int \mathrm{tg}^5 x\ dx$$

4.95.

$$\int \frac{dx}{\sin^4(x)\cdot\cos^4(x)}$$

4.96.

$$\int \frac{1+\mathrm{tg}\ x}{\sin(2x)}\ dx$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2(x)}$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4(x)+\sin^4(x)}{\cos^2(x)-\sin^2(x)}\ dx$$

4.99.

$$\int \sin(3x)\cdot\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)\ dx$$

4.100.

$$\int \sqrt{1+\sin(x)}\ dx$$

Hiperbolikus és exponenciális kifejezések

4.101.

$$\int \mathrm{sh}^2 x\cdot\mathrm{ch}^3 x\ dx$$

4.102.

$$\int \frac{\mathrm{sh}^3 x}{\sqrt{\mathrm{ch}\ x}}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.103.}}$

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x \cdot \text{ch } x}$$

$\boxed{\textbf{4.104.}}$

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x}$$

$\boxed{\textbf{4.105.}}$

$$\int \text{ch } x \cdot \text{ch } 2x \cdot \text{ch } 3x \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.106.}}$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.107.}}$

$$\int \frac{6}{e^x - 3} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.108.}}$

$$\int e^x \cdot \; \text{sh } 3x \; dx$$

4.109.

$$\int e^x \cdot \text{sh } x dx$$

Gyökös kifejezések

$\boxed{\textbf{4.110.}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x + 5}} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.111.}}$

$$\int (x^2 - 3x + 2) \cdot \sqrt{2x - 1} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.112.}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$\boxed{\textbf{4.113.}}$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1 + \sqrt{x}} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.114.}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$$

$\boxed{\textbf{4.115.}}$

$$\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} \cdot \frac{dx}{x}$$

$\boxed{\textbf{4.116.}}$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x^2}} \; dx$$

$\boxed{\textbf{4.117.}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$$

4.118.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 2}}$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x - 9x^2 - 4}}$$

4.120.

$$\int \sqrt{1 + 2x - x^2}\ dx$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2 - 3x + 1}\ dx$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2 + 6x + 10}\ dx$$

4.123.

$$\int \sqrt{3 - x^2}\ dx$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 40}}$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}}$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2 + 8x + 5}\ dx$$

4.127.

$$\int \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{4 + x - x^2}}\ dx$$

4.1.2. Határozott integrálok. Vegyes feladatok

4.128.

$$\int_0^1 2x^2 + x + 1\ dx$$

4.129.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

4.130.

$$\int_2^3 \frac{1}{(2x + 1)^2} dx$$

4.131.

$$\int_0^1 e^{2x} dx$$

4.132.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(x) dx$$

4.133.

$$\int_0^{\pi} \sin^3(x)dx$$

4.134.

$$\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2(x)\sin^3(x)\ dx$$

4.135.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin(x)}\ dx$$

4.136.

$$\int_0^{\pi} \sin(4x)\cos(3x)\ dx$$

4.137.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4(x)\sin^2(x)\ dx$$

4.138.

$$\int_0^{\pi} \sin(4x)\cos(5x)\ dx$$

4.139.

$$\int_0^1 x \cdot e^{-x^2}dx$$

4.140.

$$\int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \frac{\cos(\ln x)}{x}dx$$

4.141.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

4.142.

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

4.143.

$$\int_1^4 \frac{x}{\sqrt{5x-4}}dx$$

4.144.

$$\int_0^2 xe^x dx$$

4.145.

$$\int_0^{\sqrt{3}} 2x \cdot \operatorname{arc\,tg} x dx$$

4.146.

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1) \sin(3x)\ dx$$

4.147.

$$\int_0^1 \left(\frac{x+2}{e^x} \right)^2\ dx$$

4.148.

$$\int_0^1 x^2 a^x\ dx, \qquad a > 0$$

4.1.3. Improprius integrálok

Számítsuk ki az alábbi improprius integrálok értékét!

$\boxed{\textbf{4.149.}}$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2}\ dx$$

$\boxed{\textbf{4.150.}}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\ dx$$

4.151.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\ dx$$

4.152.

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{5}{x^2 - 2x + 2}\ dx$$

4.153.

$$\int_{-\infty}^{-3} xe^x\ dx$$

4.154.

$$\int_{-\infty}^{10} xe^x\ dx$$

4.155.

$$\int_4^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\ dx$$

4.156.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(1+2x)^3}\ dx$$

4.157.

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{2}{3x+1}\ dx$$

4.158.

$$\int_1^{\infty} e^{-2x+1}\ dx$$

4.159.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-1)^3}}\, dx$$

4.160.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.161.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.162.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.163.}}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1}\, dx$$

4.164.

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}\, dx$$

$\boxed{\textbf{4.165.}}$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

4.166.

$$\int_0^5 \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$$

4.167.

$$\int_{\frac{4}{3}}^5 \frac{dx}{\sqrt{3x-4}}$$

4.168.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\, dx$$

4.169.

$$\int\limits_{1/2}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

4.170.

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^2} dx$$

4.171.

$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{1}{x-1} dx$$

4.172.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$$

4.173.

$$\int\limits_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$$

4.174.

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ax} dx, \qquad a > 0$$

4.175.

$$\int_0^\infty xe^{-ax}dx$$

4.176.

$$\int_0^\infty \cos(x)e^{-x}dx$$

4.177.

$$\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx$$

4.178.

$$\int_0^\infty \sin(ax)e^{-bx}dx$$

4.179.

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$$

4.180.

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx$$

4.1.4. Az integrálszámítás alkalmazásai

Területszámítás

Határozzuk meg a függvények gráfjai alatti területet, és ábrázoljuk a függvényeket.

4.181. $y = \frac{3x^2}{2}; \quad -2 \le x \le 2$

4.182. $y = \frac{5}{3x^2} + x; \quad 1 \le x \le 3$

4.183. $y = \sqrt{x}; \quad 0 \le x \le 1$

4.184. $y = (1-x)^3; \quad -2 \le x \le 1$

4.185. $y = x^3 - 3; \quad 3 \le x \le 4$

4.186. $y = x^4 - x^3; \quad 1 \le x \le 2$

4.187. $y = e^{2x}; \quad -0.5 \le x \le 1$

$\boxed{\textbf{4.188.}}$ $y = \sin(3x); \quad 0 \le x \le 0.3$

4.189. $y = \cos(3x); \quad -0.5 \le x \le 0.5$

4.190. $y = \cos(\frac{x}{2}); \quad 0 \le x \le \pi$

4.191. $y = \mathrm{ch}(2x); \quad 0 \le x \le 3$

4.192. $y = \mathrm{sh}(x); \quad 0 \le x \le 2$

4.193. $y = \frac{2}{x}; \quad -2 \le x \le -1$

4.194. $y = \frac{1}{1+x}; \quad 1 \le x \le 3$

4.195. $y = \frac{1}{2x-5}; \quad 3 \le x \le 4$

4.196. $y = \frac{1}{2x-5}; \quad 5 \le x \le 10$

4.197. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = \frac{1}{1+x^2}$ görbe alatti terület 0-tól x-ig terjedő része $\frac{\pi}{4}$-gyel legyen egyenlő!

4.198. Határozzuk meg x értékét úgy, hogy az $y = e^{-2x}$ görbe alatti terület x-től 1-ig terjedő része 3-mal legyen egyenlő!

4.199. Határozzuk meg $x \in [0, \pi]$ értékét úgy, hogy az $y = \sin(x)$ alatti terület 0-tól x-ig terjedő része $\frac{1}{4}$-del legyen egyenlő!

Határozzuk meg a következő görbék közötti területet és ábrázoljuk is a görbéket.

4.200. $y = x^2$ és $y = 2x$

4.201. $y = \sqrt{x}$ és $y = \frac{x}{2}$

$\boxed{\textbf{4.202.}}$ $y = x^2$ és $y = 1 - x^2$

4.203. $y = x^2$ és $y = 1 - 3x^2$

4.204. $y = x^2$ és $y = 3x$

4.205. $y = \frac{x^2}{3}$ és $y = 2 + \frac{x}{3}$

4.206. $y = \frac{1}{x}$ és $y = 2.5 - x$

4.207. $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 1$ és $y = 1 - x$

4.208. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ és $x + y = 1$

Végezzük el az alábbi területszámításokat.

4.209. Határozzuk meg az $y = x(1 - x)$ parabola és ennek az $x = 0, x = 2$ abszcisszájú pontjaihoz húzott érintői közötti területet!

4.210. Határozzuk meg az $y = 4.5 - \frac{1}{2}(x - 4)^2$ parabola, és ennek az $x = 3$ és $x = 6$ pontjában húzott érintői közötti területet!

4.211. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola, és a $P(2, 2)$ pontra illeszkedő, $y = x$ egyenesre merőleges egyenes által határolt síkidom területét.

4.212. Határozzuk meg az $y = \frac{1}{x}$ hiperbola, az $y = x$ és az $y = \frac{x}{a^2}$ (ahol $a > 0$ adott) egyenes által határolt síkidom területét! Ábrázoljuk is a szektort!

Görbe ívhossza

Határozzuk meg az függvények görbéjének ívhosszát a megadott határok között.

4.213. $y = x^2$; $1 \le x \le 4$

4.214. $y = \operatorname{ch} x$; $0 \le x \le 3$

4.215. $y = \ln x; \quad 2 \leq x \leq 6$

4.216. $y = \ln(\sin(x)); \quad \dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

4.217. $x^2 + y^2 = 25; \quad 0 \leq x \leq 5$

4.218. $x = 5\cos t; \; y = 5\sin t; \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

4.219. $x = a(t - \sin t); \; y = a(1 - \cos t);$ $0 \leq t \leq 2\pi$

4.220. $x = 5\cos^3 t; \; y = 5\sin^3 t; \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{3}$

4.221. $x = 2t; \; y = 3t^2; \quad 2 \leq t \leq 5$

Forgástestek térfogata

Forgassuk meg a következö görbéket az x tengely körül, és határozzuk meg a keletkező forgásfelületek és a megadott intervallumok végpontjaiban az x tengelyre állított merőleges síkok határolta térrész térfogatát.

$\boxed{\textbf{4.222.}}$ $y = e^{2x}; \quad 0 \leq x \leq 2$

4.223. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 4$

4.224. $y = \dfrac{x^3}{3}; \quad 1 \leq x \leq 2$

4.225. $y = x - \dfrac{1}{x}; \quad 1 \leq x \leq 3$

4.226. $y = 1 - x^2; \quad -1 \leq x \leq 1$

4.227. $y^2 - x^2 = 1; \quad 0 \leq x \leq 3$

4.228. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1; \quad 0 \leq x \leq 1$

$\boxed{\textbf{4.229.}}$ $y = \cos^2 x; \quad 0 \leq x \leq \pi$

4.230. $y = \dfrac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}; \quad 1 \leq x \leq 3$

4.231. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1; \quad -a \leq x \leq a$

4.2. Integrálszámítás. Megoldások

4.2.1. Határozatlan integrál

Elemi függvények

4.1. $\ln|x+1|+C$.

4.2.

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = x-\ln|x+1|+C.$$

4.3. $x-\operatorname{arc\,tg} x+C$.

4.4. $-\frac{1}{4}\cos(2x)+C$.

4.5.

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\;dx = \frac{x^{-1}}{-1}+C = -\frac{1}{x}+C.$$

4.6.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\;dx = 3\frac{x^{\frac{2}{3}}}{2}+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$$

4.7.

$$\int x^2\left(x^2-1\right)\;dx = \int \left(x^4-x^2\right)\;dx = \int x^4\;dx - \int x^2\;dx = \frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+C.$$

4.8.

$$\int \left(x^2-1\right)^2 dx = \int \left(x^4-2x^2+1\right) dx = \frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+C.$$

4.9.

$$\int \frac{\sqrt{x}-x+x^4}{x^2}\;dx = \int \left(x^{-\frac{3}{2}}-\frac{1}{x}+x^2\right)\;dx = -\frac{2}{\sqrt{x}}-\ln|x|+\frac{x^3}{3}+C.$$

4.10. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C$.

4.11.

$$\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\ dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}}+1\right)\ dx = \frac{2}{5}\sqrt{x^5}+x+C.$$

4.12. $\frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C.$

4.13. $\frac{x^2}{2}-2x+3\ln|x-2|+C.$

4.14.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}\ dx = \int \left(\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}+\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right)\ dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right)\ dx = -\frac{1}{x}+\operatorname{arc\ tg}\ x+C.$$

4.15.

$$\int \frac{6}{5+5x^2}\ dx = \frac{6}{5}\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{6}{5}\ \operatorname{arc\ tg}\ x+C.$$

4.16.

$$\int \frac{\ln 2}{\sqrt{2+2x^2}}\ dx = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}\cdot \operatorname{arc\ sh}\ x+C.$$

4.17. $\operatorname{tg}(x)-x+C.$

4.18.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x)-\sin(x)}\ dx &= \int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos(x)-\sin(x)}\ dx\\ &= \int (\cos(x)+\sin(x))\ dx = \sin(x)-\cos(x)+C.\end{aligned}$$

4.19. $\frac{x}{2}+C.$

4.20. $x-7\ln|x|-\frac{8}{x}+C.$

Helyettesítés

4.21. Végezzük el az $u=-x$ helyettesítést, ezzel $dx=-du$:

$$\int e^{-x}\ dx=-\int e^{u}\ du=-e^{u}+C=-e^{-x}+C.$$

4.22. Végezzük el az $u=4x-5$ helyettesítést. Ekkor $du=4\ dx$, és így

$$\int \cos(4x-5)\ dx=\frac{1}{4}\int \cos u\ du=\frac{1}{4}\sin u+C=\frac{1}{4}\sin(4x-5)+C.$$

*M*egjegyzés: Az ilyen integrálokat célszerű annak az összefüggésnek a felhasználásával kiszámítani, hogy ha

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

akkor

$$\int f(Ax+b)\ dx=\frac{1}{A}F(Ax+b)+C.$$

Például:

$$\int \cos(x)\ dx=\sin(x)+C,$$

tehát

$$\int \cos(4x-5)\ dx=\frac{1}{4}\sin(4x-5)+C.$$

A továbbiakban ezt az eljárást alkalmazzuk valahányszor a belső függvény x-nek lineáris függvénye.

4.23.

$$\int \sqrt{8-2x}\ dx=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(8-2x)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}\sqrt{(8-2x)^3}+C.$$

4.24.

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\ dx=-\frac{1}{3}\left[-\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)\right]+C=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)+C.$$

4.25.

$$\begin{aligned}\int 10^{x}e^{x}\ dx &= \int e^{x\ln 10}\cdot e^{x}\ dx=\int e^{x(1+\ln 10)}\ dx\\ &= \frac{e^{x(1+\ln 10)}}{1+\ln 10}+C=\frac{10^{x}e^{x}}{1+\ln 10}+C.\end{aligned}$$

Megoldás közben azt az összefüggést használtuk fel, hogy $a=e^{\ln a}$, ill. $10=e^{\ln 10}$. Ezért

$$10^{x}=\left(e^{\ln 10}\right)^{x}=e^{x\ln 10}.$$

4.26.

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C = \frac{\sqrt{5}}{5}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}} + C.$$

4.27.

$$\int \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}}\,dx = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{3x^2}{2}-1}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right) + C = \ = \sqrt{3}\ \operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ x\right) + C.$$

4.28. $-\dfrac{1}{8(2x-3)^4} + C.$

4.29. $-\dfrac{5}{33}\cdot\sqrt[5]{(8-3x)^{11}} + C.$

4.30.

$$\int x\sqrt{1-x^2}\ dx = -\frac{1}{2}\int(-2x)\cdot\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int\sqrt{u}\ du = -\frac{1}{3}\ u^{\frac{3}{2}} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

Az integrálban $u = 1-x^2$ helyettesítést végeztük el, ekkor $du = -2x\ dx$.

4.31. $\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{(x^3+8)^4} + C$

4.32.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}} = \sqrt{x^2+1} + C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2+1$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.33.

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\ dx = \int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\sin(x)} + C.$$

A használt helyettesítés: $u = \sin(x)$, ekkor $du = \cos(x)\ dx$.

4.34.

$$\int x\sin(x^2+2)\ dx = \frac{1}{2}\int \sin u\ du = -\frac{1}{2}\cos\left(x^2+2\right)+C.$$

A használt helyettesítés: $u = x^2+2$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.35. $\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\operatorname{tg}^4 x}+C.$

4.36.

$$\int \frac{x}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{4+x^2}\ dx = \frac{1}{2}\ln\left(4+x^2\right)+C.$$

Azt látjuk, hogy 2-vel való szorzás után a számláló a nevező deriváltja, tehát a kifejezés integrálja a nevező e alapú logaritmusával egyenlő. Ezt a szabályt jól tanuljuk meg és az ilyen esetekben mellőzzük a helyettesítést, bár ez az előzőek egy speciális esete. (Most is alkalmazhattuk volna az $u = x^2+4$ helyettesítést.)

4.37.

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\ dx = \ln\ln x + C$$

4.38.

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\ dx = \int \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}\cdot\sqrt{\ln^3 x}+C.$$

A használt helyettesítés $u = \ln x$, ekkor $du = \dfrac{1}{x}\ dx$.

4.39.

$$\int \frac{x+2}{2x-1}\ dx = \int \left(\frac{1}{2}+\frac{\frac{5}{2}}{2x-1}\right)\ dx = \frac{x}{2}+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}\ln(2x-1)+C.$$

4.40.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{1-x}\ dx &= \int\left(-x^3-x^2-x-1-\frac{1}{x-1}\right)\ dx\\ &= -\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x-\ln(x-1)+C.\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\frac{x^4}{1-x} = -\frac{x^4}{x-1} = -\left(x^3+x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right).$$

4.41.

$$\int \frac{x}{x^4+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2} \text{ arc tg } u + C = \frac{1}{2} \text{ arc tg } x^2 + C.$$

A használt helyettesítés $u = x^2$, ekkor $du = 2x\ dx$.

4.42.

$$\int \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\, dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{arsh } u + C = \text{arsh}(\sin(x)) + C.$$

A használt helyettesítés: $u = \sin(x)$, ekkor $du = \cos(x)dx$.

4.43. $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{x^8-1} + C.$

4.44. Ilyen esetekben az integrálandó függvényt két függvény összegére bontjuk. Az egyik függvénynél a számláló a nevező deriváltjának konstansszorosa legyen, a másik függvénynél pedig a számláló már csak egy konstans, melyet az integrál jel elé is kivihetünk. Tehát

$$\int \frac{3x-1}{x^2+9}\, dx = \int \left(\frac{3x}{x^2+9} - \frac{1}{x^2+9}\right) dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+9}\, dx - \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{1}{3} \text{ arc tg } \frac{x}{3} + C.$$

4.45. $\int \sin(8x)dx = -\frac{\cos(8x)}{8} + C.$

4.46. $\int \frac{dx}{3x-5} = \ln|3x-5| + C.$

4.47. $\int e^{5x+7}dx = \frac{1}{5}e^{5x+7} + C.$

4.48. $\int \sin^3(x)\cos(x)dx = \frac{\sin^4(x)}{4} + C.$

4.49. $-\frac{1}{2}(1-x^3)^{2/3} + C.$

4.50. $-\ln|\cos(x)| + C.$

4.51. $2\ln(\sqrt{x}+1) + C.$

Parciális integrálás

4.52. $-\dfrac{(x^2-1)\cos 3x}{3}+\dfrac{2x\sin 3x}{9}+\dfrac{2\cos 3x}{27}+C.$

4.53.

$$\int\left(\frac{x+2}{e^x}\right)^2 dx=\int\left(x^2+4x+4\right)\mathrm{e}^{-2x}\,dx=-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}x+\frac{13}{4}\right)e^{-2x}+C.$$

4.54. $\dfrac{x^2 2^x}{\ln 2}-\dfrac{x2^{x+1}}{(\ln 2)^2}+\dfrac{2^{x+1}}{(\ln 2)^3}+C.$

4.55.

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int x^2e^{-x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int ue^{-u}du=-\frac{1}{2}(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2}+C,$$

ahol $u=x^2$ helyettesítéssel $du=2xdx$.

4.56. $t=\sqrt{x}$ helyettesítéssel, majd parciális integrálással: $-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$.

4.57.

$$\int x\sin(x)\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}\int x\sin(2x)\,dx=\frac{1}{8}\sin(2x)-\frac{x}{4}\cos(2x)+C.$$

4.58. A $\cos^2(x)=\dfrac{1+\cos(2x)}{2}$ linearizáló formulát alkalmazzuk, majd kétszer parciálisan integrálunk.

Az eredmény: $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2\sin(2x)}{4}+\dfrac{x\cos(2x)}{4}-\dfrac{\sin(2x)}{8}+C.$

4.59.

$$\int\underbrace{x}_{u'}\underbrace{\operatorname{arc\,tg} x}_{v}\,dx=*,$$

ahol a parciális integráláskor $u=\frac{x^2}{2}$, és $v'=\frac{1}{1+x^2}$. Így

$$*=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\frac{x^2}{2}\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x+C.$$

Felhasználtuk, hogy

$$\int\frac{x^2}{1+x^2}\,dx=\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,dx.$$

4.60.

$$\int \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}\ dx = 2\int u \operatorname{arc\,tg} u\ du = x \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arc\,tg}\sqrt{x} + C$$

A használt helyettesítés: $x = u^2$, ekkor $dx = 2u\ du$.

4.61. Két parciális integrálást kell elvézgezni:

$$\int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln^3 x}_{v}\ dx = x\ln^3 x - \int \underbrace{3}_{u'}\underbrace{\ln^2 x}_{v}\ dx =$$

$$= x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\int \ln x\ dx == x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x + C.$$

4.62. $u' = 1$, $v = (\arcsin x)^2$ válsztással egy parciális integrálást végzünk, ekkor

$$u = x \qquad v' = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},$$

és ezért

$$\int (\arcsin x)^2\ dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ \operatorname{arc\,sin}(x) dx = *$$

Újabb parciális integrálást végzünk

$$u = \arcsin x, \qquad v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

választással, ekkor

$$* = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2\int dx =$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x - 2x + C.$$

4.63. Kt́féleképpen végezzïnk parciális integrálást:

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u}\underbrace{\cos(2x)}_{v'}\ dx = \frac{1}{2}e^{3x}\sin(2x) - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin(2x)\ dx \tag{4.1}$$

ahol

$$u' = 3e^{3x} \qquad v = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

Másrészt

$$\int \underbrace{e^{3x}}_{u'} \underbrace{\cos(2x)}_{v}\ dx = \frac{1}{3}e^{3x}\cos(2x) + \frac{2}{3}\int e^{3x}\sin(2x)\ dx \tag{4.2}$$

ahol

$$u = \frac{1}{3}e^{3x} \qquad v' = -2\sin(2x).$$

Szorozzuk meg (4.1)-et néggyel, (4.2)-t pedig kilenccel és vonjuk össze az így adódó kifejezések jobb- illetve bal oldalát.

$$4\int e^{3x}\cos(2x)\ dx = 2e^{3x}\sin 2x - 6\int e^{3x}\sin(2x)\ dx$$

$$9\int e^{3x}\cos 2x\ dx = 3e^{3x}\cos 2x + 6\int e^{3x}\sin(2x)\ dx$$

$$13\int e^{3x}\cos(2x)\ dx = 2e^{3x}\sin 2x + 3e^{3x}\cos(2x) + C.$$

Végül 13-al való osztás után nyerjük, hogy:

$$\int e^{3x}\cos 2x\ dx = \frac{1}{13}e^{3x}(2\sin(2x) + 3\cos(2x)) + C.$$

4.64.

$$\int e^{\arcsin x}\ dx = \int e^{u}\cos u\ du,$$

ahol $\arcsin x = u$, azaz $x = \sin u$ helyettesítéssel $dx = \cos u\ du$ Így olyan alakra jutottunk, melyet parciálisan lehet integrálni, éppen az előző példában is bemutatott módszerrel. A parciális integrálást elvégezve adódik, hogy

$$\int e^{u}\cos u du = \frac{1}{2}e^{u}(\sin u + \cos u) + C,$$

tehát

$$\int e^{\arcsin x} dx = \frac{1}{2}\ \mathrm{e}^{\arcsin x}(x + \sqrt{1-x^2} + C).$$

Racionális törtfüggvények integrálja

4.65. Ha a másodfokú nevezőjű törtfüggvény nevezője tényezők szorzataként írható fel, akkor a tört lineáris nevezőjű törtek összegére bontható.

Annak érdekében, hogy ezt a felbontást elvégezhessük a nevezőt egyenlővé tesszük 0-val és megoldjuk az így nyert egyenletet, mert ennek az egyenletnek a gyöktényezői lesznek a szorzat alakban felírt nevező tényezői. Az $x^2 - 7x + 12 = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, azaz

$$x^2 - 7x + 12 = (x-3) \cdot (x-4)$$

Most már ismerjük a keresett lineáris tört-függvények nevezőit, határozzuk még a számlálókat, melyek lineáris nevező esetén konstansok. Jelöljük ezeket A-val és B-vel, akkor

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \equiv \frac{A(x-4)+B(x-3)}{(x-3)(x-4)}.$$

Azonosságot írtunk, mert olyan A és B értéket keresünk, melyek mellett az egyenlőség minden x-re fennáll. Mivel a nevezők azonosan egyenlők az azonosságnak a számlálókra is fenn kell állni, azaz

$$x - 2 \equiv A(x-4) + B(x-3).$$

Az azonosság nyilván fennáll, ha az x-es tagok együtthatója mind a két oldalon egyenlő ugyanúgy, mint a konstansok. Ez azonban két egyenletet szolgáltat, melyekből A és B kiszámítható.

$$B = 2, \qquad A = -1$$

A kapott értékeket behelyettesítve

$$\frac{x-2}{x^2-7x+12} = -\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}.$$

Ezért az integrál

$$\int \frac{x-2}{x^2-7x+12}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-4}\right)\,dx = -\ln(x-3) + 2\ln(x-4) + C =$$

$$= \ln c\frac{(x-4)^2}{x-3}, \qquad (C = \ln c \text{ bevezetésével})$$

4.66. Az $x^2 + 4x + 8 = 0$ egyenletnek nincsenek valós gyökei, tehát $x^2 + 4x + 8$ nem bontható tényezők szorzatára.

Bontsuk fel a törtet két tört összegére, melynek nevezője közös (a régi nevező), az egyik számlálója a nevező deriváltjának valami konstans-szorosa, a másiké pedig konstans. A nevező deriváltja $2x + 4$, tehát a számlálókat a következő alakban keressük

$$\alpha(2x+4) \qquad \text{és} \qquad \beta.$$

α és β értékét a következő feltételekből határozhatjuk meg:

$$\alpha(2x+4)+\beta = 3x-2.$$

Most is két egyenletet írhatunk fel, melyekből α és β meghatározható.

$$2\alpha = 3, \qquad 4\alpha+\beta = -2,$$

ezekből

$$\alpha = \frac{3}{2}, \qquad \beta = -8.$$

Így az integrált két integrál összegére bontottuk:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+8}\,dx - 8\int \frac{dx}{x^2+4x+8}.$$

Az első integrál eredménye ismert, hiszen a számláló a nevező deriváltja. A másodikat pedig teljes négyzetté való átalakítással vezetjük vissza ismert feladatra.

$$\frac{1}{x^2+4x+8} = \frac{1}{(x+2)^2+4} = \frac{1}{4\left[\frac{(x+2)^2}{4}+1\right]}$$

ezért

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+8} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2+1} = \frac{1}{4}2\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+2}{2}+C.$$

Tehát a megoldás:

$$\int \frac{3x-2}{x^2+4x+8}dx = \frac{3}{2}\ln(x^2+4x+8) - 4\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+2}{2}+C.$$

4.67. $\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}$ számlálója magasabb fokú mint a nevezője, ezért felbontható egy polinom és egy valódi tört összegére.

$$\left(x^5+x^4-8\right) : \left(x^3-4x\right) = x^2+x+4$$

$$\begin{array}{l}
-(x^5-4x^3) \\ \hline
\quad x^4+4x^3-8 \\
-(x^4-4x^2) \\ \hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \quad 4x^3+4x^2-8 \\ -(4x^3-16x) \\ \hline 4x^2+16x-8 \end{array}$$

A polinom osztás eredménye:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x},$$

tehát

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int(x^2+x+4)dx+\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx.$$

Az első integrál kiszámítása nem okoz gondot. A második meghatározásához a törtet részlet-törtek összegére kell bontanunk.

A nevezőt most minden különösebb számítás nélkül fel tudjuk írni szorzat alakjában

$$x^3-4x=x(x^2-4)=x(x+2)(x-2),$$

tehát

$$\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}=$$
$$=\frac{A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)}{x^3-4x}.$$

Ennek alapján felírhatjuk az egyenletrendszert, melyből A, B és C kiszámítható:

$$A+B+C=4 \qquad -2B+2C=16 \qquad -4A=-8,$$

és innen

$$A=2, \qquad B=-3, \qquad C=5.$$

Megjegyezzük, hogy ilyen esetekben, amikor a gyökök mind különbözőek, általában gyorsabban kapjuk az ismeretlen A, B, C értékeket, ha a számlálók egyenlőségét kifejező egyenletben x helyére a gyököket helyettesítjük.

Példánkban az

$$4x^2+16x-8=A(x^2-4)+B(x^2-2x)+C(x^2+2x)$$

kifejezésben x helyébe zérust írva azonnal nyerjük, hogy $-8=-4A$ azaz $A=2$. $x=2$-nél $40=8C$, innen $C=5$. Végül $x=-2$-nél $-24=8B$, azaz $B=-3$, tehát

$$\int\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}dx=\int\left(\frac{2}{x}-\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-2}\right)dx=$$
$$=2\ln x-3\ln(x+2)+5\ln(x-2)+C.$$

A keresett megoldás:

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}+C.$$

4.68. Könnyen meggyőződhetünk róla, hogy a nevező négy különböző tényező szorzatára bontható. Ezután a feladat az előzőhöz hasonlóan oldható meg. De munkát takaríthatunk meg az $u = x^2$ helyettesítéssel. Ekkor ugyanis $du = 2xdx$ és

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - 3u + 2} = \frac{1}{2} \ln \frac{u-2}{u-1} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2-2}{x^2-1} + C.$$

4.69. $\frac{1}{2\sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right|$

4.70.

$$\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}\, dx = \int \frac{4x-8+11}{(x-2)^3}\, dx = \int \left[\frac{4}{(x-2)^2} + \frac{11}{(x-2)^3} \right] dx =$$

$$= -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C$$

4.71.

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5$$

kifejezést $x - 2$ polinomjaként felírva (pld. előállítjuk az

$$x_0 = 2$$

helyhez tartozó Taylor polinomját, lásd, 401. példát).

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 5 = (x-2)^3 - (x-2) + 1$$

adódik, azaz

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4}\, dx = \int \frac{(x-2)^3 - (x-2) + 1}{(x-2)^4}\, dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^3} + \frac{1}{(x-2)^4} \right) dx =$$

=

$$\ln(x-2) + \frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-2)^3} + C$$

(Természetesen úgy is eljárhattunk volna, hogy a részlet-törtekre bontást a többszörös gyököknek megfelelően végeztük volna el

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 5}{(x-2)^4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3} + \frac{D}{(x-2)^4}$$

alapján).

4.72. Többszörös gyökök esetén a gyöktényező a multiplicitásnak megfelelő számossággal szerepel a nevezőben az egytől a multiplicitásnak megfelelő hatványig. Elsőfokú gyöktényező esetén a számláló konstans.

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{d}{x-2}+\frac{e}{(x-2)^2}.$$

Ugyanis ebben a példában a 0 háromszoros, 2 pedig kétszeres gyök.

$$x^3-2x^2+4\equiv$$

$$\equiv A(x^4-4x^3+4x^2)+B(x^3-4x^2+4x)+C(x^2-4x+4)+d(x^4-2x^3)+ex^3$$

$$\left.\begin{array}{l} A+d=0 \\ -4A+B-2d+e=1 \\ 4A-4B+C=-2 \\ 4B-4C=0 \\ 4C=4 \end{array}\right\} =$$

Egyenletrendszerből

$$A=\frac{1}{4},\quad B=1,\quad C=1,\quad d=-\frac{1}{4},\quad e=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}\,dx=\int\left(\frac{1}{4x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{1}{4(x-2)}+\frac{1}{2(x-2)^2}\right)dx=$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2(x-2)}+C$$

4.73.

$$\int\frac{dx}{x^4-x^2}=\int\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{0}{x}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$$

4.74.

$$\frac{1}{x^6+x^4}=\frac{1}{x^4(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{D}{x^4}+\frac{Ex+F}{x^2+1}.$$

Másodfokú gyöktényező esetén a számláló elsőfokú!

$$1\equiv A(x^5+x^3)+B(x^4+x^2)+C(x^3+x)+D(x^2+1)+Ex^5+Fx^4$$

azonosságból írható fel az egyenletrendszer, melyből A, B, C, D, E és F meghatározható.

$$A+e=0$$

$$B + \mathrm{F} = 0$$

$$A + C = 0$$

$$B + d = 0$$

$$C = 0 \quad A = 0 \quad E = 0$$

$$D = 1 \quad B = -1 \quad \mathrm{F} = 1$$

Tehát

$$\int \frac{dx}{x^6 + x^4} = \int \left(\frac{0}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \text{arc tg } x + C.$$

4.75.

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+1) + B(x^2-x) + C(x-1)}{x^3-1}$$

$$A + B = 0 \qquad A = \frac{1}{3} A - B + C = 1 \qquad B = -\frac{1}{3} A - C = 0 \qquad C = \frac{1}{3}$$

$$\int \frac{x}{x^3-1} dx = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x^2+x+1} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg } \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

4.76.

$$\int \frac{x^2}{1-x^4} dx = \int \frac{x^2}{(1+x^2)(1-x^2)} dx = \int \frac{x^2}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} dx =$$

$$= \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{1+x} - \frac{\frac{1}{4}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \text{arc tg } x + C.$$

4.77.

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+d}{x^2+1}$$

alapján végezzük a részlet-törtekre bontást és nyerjük:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)} = \int \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2(x^2+1)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)C$$

4.78. A nevező tényezőkre bontását a következőképpen végezhetjük el:

$$1+x^4 = 1+2x^2+x^4-2x^2 = (1+x^2)^2 - 2x^2 = (1+x^2)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 =$$

$$= (1+x^2+\sqrt{2}\,x)(1+x^2-\sqrt{2}\,x)$$

A rész törtekre való bontás vázlata

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

Az eredmény:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2+\sqrt{2}\,x+1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2}\,x}{1-x^2} + C$$

4.79. A feladat első pillanatra azonos jellegű az előzővel. Meg is oldható annak alapján, de gondosabb vizsgálat után kiderül, hogy speciális tulajdonságai figyelembe vételével sokkal egyszerűbben is megoldható.

$$\int \frac{x(1-x^2)}{1+x^4}dx = \int \frac{x}{1+x^4}dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx$$

Az első integrált

$$u = x^2$$

helyettesítéssel hozhatjuk még egyszerűbb alakra (lásd a 4.39. feladatot), a második pedig máris integrálható, mert a számláló a nevező deriváltjának a negyede.

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx - \int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x^2 - \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C$$

4.80. Többszörös komplex gyök esetén javasolható a $\operatorname{tg} t$ helyettesítés.

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left(\frac{x^2}{9}+1\right)^3} = \frac{1}{729}\int \frac{dx}{\left[(\frac{x}{3})^2+1\right]^3} =$$

$$= \frac{1}{729}\int \frac{3}{\left(\operatorname{tg}^2 t+1\right)^3\cos^2 t}dt = \frac{1}{243}\int \frac{\cos^6 t}{\cos^2 t}dt = (*)$$

$$\frac{x}{3} = \operatorname{tg} t; \qquad dx = \frac{3}{\cos^2 t}dt$$

$$(*) = \frac{1}{243}\int \cos^4 t dt = \frac{1}{243}\int \left(\frac{1+\cos^2 t}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{243}\int \frac{1+2\cos 2t+\cos^2 2t}{4}dt =$$

$$= \frac{1}{972}\int (1+2\cos 2t + \frac{1+\cos 4t}{2})dt = \frac{1}{972}\left(t+\sin 2t+\frac{t}{2}+\frac{\sin 4t}{8}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{972}\left(\frac{3}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{3}+\frac{6x}{x^2+9}+\frac{3x(9-x^2)}{2(9+x^2)^2}\right)+C =$$

$$\frac{1}{648}\ \operatorname{arc\ tg}\frac{x}{3}+\frac{x}{216(x^2+9)}+\frac{x}{36(x^2+9)^2}+C$$

4.81. $-\dfrac{1}{3(x-3)^3}+c.$

4.82. $2\ln|x-5|+c.$

4.83. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+27)+c.$

4.84. $\dfrac{1}{2}\ln(x^2-6x+27)+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-3}{3\sqrt{2}}+c.$

4.85. $\ln\dfrac{x^3(x-1)^2}{x+3}.$

Trigonometrikus függvények

4.86. Páratlan kitevő esetén helyettesítéssel oldhatjuk meg a feladatot.

$$\int \cos^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \cos(x) dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos(x) dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^2 \cos(x) dx = \int (1-u^2)^2 du = \int (1-2u^2+u^4) du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C =$$

$$= \sin(x) - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

4.87. Páros kitevő esetén a linearizáló formula alkalmazását javasoljuk.

$$\int \sin^6 x dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^3 dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 - 3\cos(2x) + 3 \cdot \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x dx$$

Az első integrálban újból alkalmaztuk a linearizáló formulát, így került

$$\cos^2 2x$$

helyébe

$$\frac{1+\cos 4x}{2}.$$

A második integrálban pedig már páratlan kitevőn szerepel trigonometrikus függvény, tehát az az előző példa mintájára megoldható.

Az eredmény:

$$\int \sin^6 x dx = \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\sin(2x) + \frac{3}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$

4.88.

$$\int \sin^6 x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \sin^6 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos(x) \, dx = \int \sin^6 x \cdot (1-\sin^2 x) \cdot \cos(x) dx =$$

$$u = \sin(x) \qquad du = \cos(x)dx$$

$$= \int u^6(1-u^2) du = \frac{1}{7}\sin^7 x - \frac{1}{9}\sin^9 x + C$$

4.89.

$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^2 x} dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2 + \cos^2 x \right) dx =$$

$$= \operatorname{tg}(x) - \frac{3}{2} x + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

4.90.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)\cdot \sin(x)}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{1-u^2}{u^4} du = \int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u^4} \right) du =$$

$$u = \cos(x) \qquad du = -\sin(x) dx$$

$$= -\frac{1}{u} + \frac{1}{3u^3} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos(x)} + C$$

4.91. Alkalmazzuk a $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{2}{2t + 1 - t^2} dt =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{2} - 1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{2} - 1} + C$$

4.92. Itt is válogathatunk a megoldási módszerek között. Alkalmazhatjuk a

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

helyettesítést, akkor

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{2}{1-t^2} dt = 2 \cdot \operatorname{arth} + C = \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C = \ln\ \operatorname{tg}\,(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C$$

De ugyanúgy használhatjuk fel a páratlan kitevőjű jellegét is.

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{du}{1-u^2} = \ln \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}} + C$$

Megfelelő átalakítások után az eredmény ugyanolyan alakra bontható:

$$\int \frac{dx}{\cos(x)} = \ln \operatorname{tg}\,(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + C.$$

4.93.

$$\int \frac{dx}{5-3\cos(x)} = \frac{1}{2}\text{arc tg}\,(2\cdot \text{tg}\,\frac{x}{2}) + C.$$

4.94. Ha $\sin(x)$-nek és $\cos(x)$-nek csak páros kitevőjű hatványai és $\text{tg}\,(x)$ fordulnak elő, akkor (bár a $t = \text{tg}\,\frac{x}{2}$ helyettesítés akkor is alkalmazható) előnyösebb a $t = \text{tg}\,(x)$ helyettesítés alkalmazása.

$$\int \text{tg}^5 x\; dx = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt = \int (t^3 - t + \frac{t}{1+t^2})dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = (*)$$

$$t = \text{tg}\,(x) \quad x = \text{arc tg}\; t \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$(*) = \frac{1}{4}\cdot \text{tg}^4 x - \frac{1}{2}\cdot \text{tg}^2 x - \ln\cdot\cos(x) + C.$$

4.95.

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x; \qquad \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1+\text{tg}^2 x}{\text{tg}^2 x}.$$

Tehát

$$t = \text{tg}\,(x)$$

helyettesítés esetén

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x} = \int \frac{(1+t^2)^2\cdot(1+t^2)^2}{t^4}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{(1+t^2)^3}{t^4}dt =$$

$$= \int \frac{1+3t^2+3t^4+t^6}{t^4}dt = \int \left(\frac{1}{t^4} + \frac{3}{t^2} + 3 + t^2\right) dt =$$

$$= -\frac{1}{3t^3} - \frac{3}{t} + 3t + \frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}\cdot \text{ctg}\,^3 x - 3\cdot\text{ctg}\,(x) + 3\cdot\text{tg}\,(x) + \frac{1}{3}\cdot\text{tg}^3 x + C.$$

4.96.

$$\int \frac{1+\text{tg}\; x}{\sin(2x)}\; dx = \frac{1}{2}\cdot\text{tg}\,(x) + \frac{1}{2}\cdot\ln\;\text{tg}\; x + C$$

4.97.

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\text{arc tg}\;(\sqrt{2}\;\text{tg}\; x) + C.$$

4.98.

$$\int \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\, dx = \frac{1}{4} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}(x)}{1 - \operatorname{tg}(x)} + \frac{1}{2} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + C.$$

(A linearizáló formula segítségével $\cos(2x)$ függvényeként írhatjuk fel az integrálandó függvényt. Ezáltal a feladat nagymértékben egyszerűsödik.)

4.99.

$$\int \sin 3x \cdot \cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)\, dx = \frac{1}{2} \int \left[\sin(8x - \frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{2} - 2x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{4} \cos(2x - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{26} \cos(8x - \frac{\pi}{2}) + C.$$

4.100. Nem típus feladat, de

$$\sin(x) = \sin 2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$$

és

$$\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

összefüggések felhasználásával egyszerű megoldást nyerünk.

$$\int \sqrt{1 + \sin(x)} dx = \int \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx =$$

$$= \int (\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}) dx = 2 \cdot \sin \frac{x}{2} - 2 \cdot \cos \frac{x}{2} + C.$$

Hiperbolikus és exponenciális kifejezéseinek integrálja

4.101. A hiperbolikus függvények integrálását sok esetben, - mint pl. most is - a trigonometrikus integrálhoz hasonlóan végezzük el. (Megemlítjük azonban, hogy a hiperbolikus függvények racionális függvényeinek az integrálása mindig visszavezethető e^x racionális függvényének az integrálására. A célszerűség dönti el, hogy mikor melyik utat választjuk.)

$$\int \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int \operatorname{sh}^2 x \cdot (1 + \operatorname{sh}^2 x) \cdot \operatorname{ch} x\, dx = \int u^2 (1 + u^2) du = \int (u^2 + u^4) du = (*)$$

$$u = \operatorname{sh} x; \qquad du = \operatorname{ch} x dx$$

$$(*) = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{sh}^5 x + C.$$

4.102.

$$\int \frac{\text{sh}^3 x}{\sqrt{\text{ch } x}}\, dx = \int \frac{(\text{ch}^2 x - 1)\text{sh } x}{\sqrt{\text{ch } x}}\, dx = \int \frac{u^2-1}{\sqrt{u}} du = \frac{2}{5}\sqrt{\text{ch}^5 x} - 2\sqrt{\text{ch } x} + C$$

$$u = \text{ch } x \qquad du = \text{sh } x dx.$$

4.103. A $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ aznonosság felhasználásávalazt kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x \cdot \text{ch } x} = \int \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{sh } x \cdot \text{ch } x} dx = \int \left(\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} - \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \right) dx = \ln \text{sh } x - \ln \text{ch } x + C =$$

$$= \ln \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} + C = \ln \ \text{th } x + C.$$

4.104. Az előző példa alapján nagyon egyszerűen kapjuk az eredményt a következő átalakítás után:

$$\int \frac{dx}{\text{sh } x} = \int \frac{dx}{2 \text{ sh } \frac{x}{2} \text{ ch } \frac{x}{2}} = \ln \ \text{th } \frac{x}{2} + C.$$

Alternatív megoldás, ha sh x helyébe $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ kifejezést írunk, vagy ha sh x-el való szorzás és osztás után $\dfrac{\text{sh } x}{\text{ch}^2 - 1}$ integrálására alkalmazzuk az $u = \text{ch } x$ helyettesítést.

4.105.

$$\text{ch } \alpha \cdot \text{ch}\beta = \frac{1}{2} \left[\text{ch}(\alpha + \beta) + \text{ch}(\alpha - \beta) \right]$$

összefüggés alapján

$$\int \text{ch } x \cdot \text{ch } 2x \cdot \text{ch } 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int (\text{ch } 6x + \text{ch } 4x + \text{ch } 2x + 1) dx = \frac{1}{24} \text{ sh } 6x + \frac{1}{16} \text{ sh } 4x + \frac{1}{8} \text{ sh } 2x + \frac{1}{4} x + C.$$

4.106.

$$\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1}\, dx = \int \frac{u^2}{u+1} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u+1} du = \int (1 - \frac{1}{u+1}) du = u - \ln(u+1) + C = (*)$$

$$u = e^x \quad x = \ln u \quad dx = \frac{1}{u} du$$

$$(*) = e^x - \ln(e^x + 1) + C.$$

4.107.

$$\int \frac{6}{e^x-3}\,dx = \int \frac{6}{(\mathrm{u}-3)u}\,du = \int \left(-\frac{2}{u}+\frac{2}{u-3}\right)du = 2\ln\frac{e^x-3}{e^x}+C$$

$$e^x = u \qquad x = \ln u \qquad dx = \frac{1}{u}du$$

4.108. A parciális integrálás alkalmazható, de a megoldás ilyen módon sokkal hosszabb, mintha sh $3x$-et e^x-el fejezzük ki, ezért ezt a megoldást ajánljuk hasonló esetekben is.

$$\int e^x \cdot\ \mathrm{sh}\ 3x\ dx = \int e^x \cdot \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}dx = \int \frac{e^{4x}-e^{-2x}}{2}dx = \frac{1}{8}\ \mathrm{e}^{4x} + \frac{1}{4}\ \mathrm{e}^{-2x} + C.$$

4.109. $\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{2}-x\right)+c.$

Gyökös kifejezések integrálja

4.110.

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+5}}\,dx = \int \frac{\frac{u^2-5}{3}}{u}\cdot\frac{2}{3}u\,du = \frac{2}{9}\int (u^2-5)du = \frac{2}{9}\left(\frac{u^3}{3}-5u\right)+C = (*)$$

$$u=\sqrt{3x+5}\ ; \qquad 3x+5=u^2\ ; \qquad x=\frac{u^2-5}{3}\ ; \qquad dx=\frac{2}{3}u\,du$$

$$(*) = \frac{2}{27}\sqrt{(3x+5)^3} - \frac{10}{9}\sqrt{3x+5}+C = \frac{2}{27}\sqrt{3x+5}\cdot(3x-10)+C.$$

4.111.

$$\int (x^2-3x+2)\cdot\sqrt{2x-1}\,dx = \int \left(\frac{u^4+2u^2+1}{4} - 3\cdot\frac{u^2+1}{2}+2\right)u\cdot u\,du = (*)$$

$$u=\sqrt{2x-1}\ ; \qquad u^2=2x-1\ ; \qquad x=\frac{u^2+1}{2}\ ; \qquad dx=u\,du$$

$$(*) = \frac{1}{4}\int (u^6-4u^4+3u^2)du = \frac{1}{4}\left(\frac{u^7}{7}-\frac{4u^5}{5}+u^3\right)+C =$$

$$= \frac{1}{28}\sqrt{(2x-1)^7} - \frac{1}{5}\sqrt{(2x-1)^5} + \frac{1}{4}\sqrt{(2x-1)^3}+C.$$

4.112. A feladatot kisebb lépésekben kétszeri helyettesítéssel is megoldhatjuk. Előbb $e^x = t$, majd pedig $u = \sqrt{t+1}$ helyettesítést alkalmazva racionális törtfüggvény integrálására vezetjük vissza.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{t+1}} = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1} =$$

$$= -2 \text{ arth } u + C = -\ln \frac{1+u}{1-u} + C =$$

$$t = e^x \ ; \quad x = \ln t \ ; \quad dx = \frac{1}{t} dt; \quad u = \sqrt{t+1} \ ; \quad t = u^2 - 1 \ ; \quad dt = 2u\, du$$

$$= \ln \frac{1-u}{1+u} + C = \ln \frac{1-\sqrt{e^x+1}}{1+\sqrt{e^x+1}} + C$$

Természetesen rövidebb lesz a megoldás (és azért általában így is járunk el), ha a két helyettesítést összevonva egy megfelelő helyettesítést alkalmazunk.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{2u}{u(u^2-1)} du = 2 \int \frac{du}{u^2-1}$$

(A folytatás azonos.)

$$\sqrt{e^x+1} = u \qquad e^x = u^2 - 1 \qquad x = \ln(u^2-1) \qquad dx = \frac{2u}{u^2-1} du.$$

4.113.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{u^4}{1+u^3} \cdot 6u^5 du =$$

$$x = u^6 \qquad dx = 6u^5 du \qquad u = \sqrt[6]{x}.$$

A gyökkitevők legkisebb közös többszöröse lesz a helyettesítendő kifejezés gyökkitevője.

$$6 \int \frac{u^9}{u^3+1} du = 6 \int \left(u^6 - u^3 + 1 - \frac{1}{u^3+1} \right) du =$$

$$\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[6]{x^4} + 6\sqrt[6]{x} - 2\ln(\sqrt[6]{x}+1) +$$

$$+ \ln\left(\sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1 \right) - 2\sqrt{3} \text{ arc tg } \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$\frac{6}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + \frac{\ln \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1}{\ln \sqrt[6]{x^2} + 2\sqrt[6]{x} + 1} -$$

$$-2\sqrt{3} \text{arc tg } \frac{2\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt{3}} + C.$$

4.114.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{4u^3}{u^2+u}du = 4\int \frac{u^2}{u+1}du = 4\int (u-1+\frac{1}{u+1})du =$$

$$2u^2-4u+4\ln(u+1)+C =$$

$$x = u^4 \qquad dx = 4u^3 du$$

$$= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln(\sqrt[4]{x}+1)+C.$$

4.115.

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{x} = -\int \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}\cdot\frac{1+u^2}{1-u^2}du = -4\int \frac{u^2}{(1+u^2)(1-u^2)}du =$$

$$= \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} + \frac{0\cdot u+2}{u^2+1}\right) du = (*)$$

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = u \ ; \qquad \frac{1-x}{1+x} = u^2 \ ; \qquad x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \ ; \qquad dx = \frac{-4u}{(1+u^2)^2}du$$

$$(*) = \ln(u-1) - \ln(u+1) + 2\operatorname{arc\,tg} u + C = \ln\frac{u-1}{u+1} + 2\operatorname{arc\,tg} u + C =$$

$$= \ln\frac{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1} + 2 \text{ arc tg } \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C = \ln\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}} + 2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C$$

4.116. $x^2 = t$ helyettesítéssel a gyökjel alatt már lineáris kifejezés lesz, tehát így sikerült a feladatot az előzőkben tárgyalt típusra visszavezetni. Az eljárás azért alkalmazható a jelen esetben, mert a számlálóban $x^3 dx$ áll, ami így írható $x^2 \cdot xdx$. Itt x^2 helyébe t, xdx helyébe pedig $\frac{1}{2}dt$ írható.

Gyakorlásként oldjuk meg a feladatot ilyen bontásban is. Tekintettel azonban arra, hogy az így nyert integrált egy újabb helyettesítéssel racionalizáljuk, joggal merül fel az az igény, hogy lehetőleg egyetlen helyettesítéssel oldjuk meg a feladatot. Ez lehetséges

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x^2}}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{u-1}{2}}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{8}\int \frac{u-1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{8}\int \left(\sqrt{u} - \frac{1}{\sqrt{u}}\right) du =$$

$$1+2x^2 = u \qquad du = 4xdx \qquad x^2 = \frac{u-1}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{2}{3}\sqrt{u^3} - 2\sqrt{u}\right) + C = \frac{1}{6}\sqrt{1+2x^2}\cdot(x^2-1)+C.$$

4.117.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}} = \frac{1}{3}\ \mathrm{arsh}\ (3x-1)+C.$$

4.118.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(9x^2-12x+2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-\left[(3x-2)^2-4+2\right]}} =$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-(3x-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C.$$

4.119.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(3x-2)^2}}$$

A gyökjel alatti kifejezés az $x = \dfrac{2}{3}$ hely kivételével (amikor is 0) mindenütt negatív, ezért belőle négyzetgyök nem vonható. Az integrálandó függvény tehát sehol nincs értelmezve (még az $x = \dfrac{2}{3}$ helyen sem, mert ott a nevező 0).

4.120.

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-(x^2-2x)}dx = \int \sqrt{1-\left[(x-1)^2-1\right]}dx =$$

$$= \int \sqrt{2-(x-1)^2}dx = \sqrt{2} \cdot \int \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} dx =$$

$$\sqrt{2} \int \sqrt{1-\sin^2 u}\sqrt{2}\cos u du = 2 \cdot \int \cos u \cdot \cos u\, du =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u\ ; \qquad x = \sqrt{2}\sin u + 1\ ; \qquad dx = \sqrt{2}\cos u du$$

$$= 2 \cdot \int \cos^2 u\, du = 2 \cdot \int \frac{1+\cos 2u}{2} du = u + \frac{1}{2}\sin 2u + C$$

A visszahelyettesítéshez egyrészt

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \sin u$$

kifejezésből felírjuk, hogy

$$u = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}},$$

másrészt $\sin 2u$-t kifejezzük $\sin u$-val, mert $\sin u$ helyébe $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ írható

$$\frac{1}{2}\sin 2u = \sin u \cdot \cos u = \sin u \cdot \sqrt{1-\sin^2 u} =$$

$$\frac{x-1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{2}}$$

tehát

$$\int \sqrt{1+2x-x^2}\; dx = \arcsin \frac{x-1}{\sqrt{2}} + \frac{x-1}{2}\sqrt{1+2x-x^2} + C.$$

4.121.

$$\int \sqrt{3x^2-3x+1}dx = \sqrt{3} \cdot \int \sqrt{x^2-x+\frac{1}{3}}dx = \sqrt{3} \cdot \int \sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{12}}dx =$$

$$= \int \sqrt{\left(\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{(2\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+1}dx = (*)$$

$$2\sqrt{3}x - \sqrt{3} = \text{sh } t\ ; \qquad x = \frac{\text{sh } t + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\ ; \qquad dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \text{ch } tdt$$

$$(*) = \frac{1}{2}\int \sqrt{\text{sh}^2 t + 1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \text{ch } tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \text{ch}^2 tdt = \frac{1}{4\sqrt{3}}\int \frac{\text{ch } 2t+1}{2}dt =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(\frac{\text{sh } 2t}{2} + t\right) + C = \frac{1}{8\sqrt{3}}\left(\text{sh } t \cdot \sqrt{1+\text{sh}^2 t} + t\right) + C =$$

$$= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}(2x-1)\sqrt{1+3(2x-1)^2} + \text{arsh } \sqrt{3}\cdot(2x-1)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{12x^2-12x+4} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \text{ arsh } \sqrt{3}\cdot(2x-1) + C =$$

$$= \frac{2x-1}{4}\sqrt{3x^2-3x+1} + \frac{1}{8\sqrt{3}} \text{ arsh } \sqrt{3}\cdot(2x-1) + C.$$

4.122.

$$\int \sqrt{x^2+6x+10}\; dx = \frac{x+3}{2}\sqrt{x^2+6x+10} + \frac{1}{2} \text{ arsh } (x+3) + C.$$

4.123.

$$\int \sqrt{3-x^2}\ dx = \frac{x}{2}\sqrt{3-x^2} + \frac{1}{2}\ \arcsin \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

4.124.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+40}} = \operatorname{arsh}\ \frac{x-2}{6} + C.$$

4.125.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \operatorname{arsh}\ \frac{x+2}{\sqrt{6}} + C$$

4.126.

$$\int \sqrt{2x^2+8x+5}dx = \frac{x+2}{2}\sqrt{2x^2+8x+5} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ \operatorname{arch}\ \left[\sqrt{\frac{2}{3}}(x+2)\right] + C$$

4.127.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{4+x-x^2}}dx = \frac{31}{8}\ \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{17}} - \frac{2x+7}{4}\sqrt{4+x-x^2} + C.$$

4.2.2. Határozott integrálok. Vegyes feladatok

4.128. $\frac{13}{6}$.

4.129. $\frac{\pi}{12}$.

4.130. $\frac{1}{35}$.

4.131. $\frac{e^2-1}{2}$.

4.132. $\frac{\pi}{4}$.

4.133. $\frac{4}{3}$.

4.134. $-\frac{4}{15}$.

4.135. $\ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{8}) - \ln \operatorname{tg}(\frac{\pi}{12})$.

4.136. $\frac{8}{7}$.

4.137. $\frac{\pi}{8}$.

4.138. $-\dfrac{4}{9}$.

4.139. $\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)$.

4.140. 1.

4.141. $\dfrac{\pi}{4}$.

4.142. $\dfrac{\pi}{12}$.

4.143. $\dfrac{66}{25}$.

4.144. e^2+1.

4.145. $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$.

4.146. 0.

4.147. $\dfrac{25}{4e^2}+\dfrac{13}{4}$

4.148.

$$\frac{a}{(\ln a)^3}\left[(\ln a)^2-2\ln a+2\right]-\frac{2}{(\ln a)^3}$$

4.2.3. Improprius integrálok

4.149.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_2^\omega \frac{1}{x^2}=\lim_{\omega\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_2^\omega=\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{1}{\omega}+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}.$$

4.150.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx=\lim_{\omega\to\infty}(\ln\omega-\ln 1).$$

Mivel $\lim_{\omega\to\infty}\ln\omega=\infty$, ezért a fenti integrál divergens.

4.151. $\dfrac{\pi}{2}$.

4.152. 5π.

4.153. $-\dfrac{4}{e^3}$.

4.154. $9e^{10}$.

4.155. Divergens.

4.156. $\dfrac{1}{36}$.

4.157. Divergens.

4.158. $\frac{1}{2e}$.

4.159. $\sqrt{2}$.

4.160. 1.

$\boxed{\textbf{4.161.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{1-x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\ln(1-x)\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\ln\varepsilon + \ln 1)$$

tehát divergens.

$\boxed{\textbf{4.162.}}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-2\sqrt{1-x}\right]_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-2\sqrt{\varepsilon}+2) = 2.$$

$\boxed{\textbf{4.163.}}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 \frac{1}{2x-1}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\ln(2x-1)\right]_{\frac{1}{2}+\varepsilon}^1 =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(\frac{1}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{2}\ln 1),$$

tehát az integrál divergens.

4.164. 1.

4.165. $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

4.166. $\frac{\pi}{2}$.

4.167. $\frac{2\sqrt{11}}{3}$.

4.168. $-\frac{\pi}{4}$.

4.169. $\frac{1}{24}(10\pi - 3\sqrt{3})$.

4.170. 1.

4.171. Nem konvergens.

4.172. π.

4.173. $2\sqrt{3}$.

4.174. $\frac{1}{a}$.

4.175. $\frac{1}{a^2}$

4.176. $\frac{1}{2}$.

4.177. 1.

4.178. $\frac{a}{a^2+b^2}$.

4.179. $\frac{1}{2}$.

4.180. $\frac{n!}{a^n}$.

4.2.4. Az integrálszámítás alkalmazásai

Területszámítás

4.181.

$$8$$

4.182.

$$\frac{46}{9}$$

4.183

$$\frac{2}{3}$$

4.184.

$$\frac{81}{4}$$

4.185.

$$\frac{163}{4}$$

4.186.

$$\frac{49}{20}$$

4.187.

$$\frac{e^3-1}{2e} \approx 3.5106$$

4.188.

$$T = \int_0^{0,3} \sin 3x \; dx = \left[-\frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{0,3} = \frac{1}{3} \cdot (1-\cos 0,9) \approx 0.1261$$

4.189.

$$\frac{2}{3} \cdot \sin 1.5 \approx 0.665$$

4.190.

$$2$$

4.191.

$$\frac{1}{2} \operatorname{sh} 6 \approx 100.86$$

4.192.

$$\operatorname{ch} 2 - 1 \approx 2.762$$

4.193

$$2\ln 2 \approx 1.386$$

4.194.

$$\ln 2$$

4.195.

$$\frac{1}{2}\ln 3$$

4.196.

$$\frac{1}{2}\ln 3$$

4.197.

$$x = 1$$

4.198.

$$x = -\frac{1}{2}\ln(6+e^{-2}) \approx -0.9070$$

4.199.

$$x = \arccos\frac{3}{4} \approx 0.7227$$

4.200.

$$\frac{4}{3}$$

4.201.

$$\frac{4}{3}$$

4.202 A metszéspontok abszcisszái: $-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$T = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-x^2) - x^2 \ dx = \left[x - \frac{2x^3}{3}\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0.9428$$

4.203.

$$\frac{2}{3}$$

4.204.

$$\frac{9}{2}$$

4.205.

$$\frac{125}{18}$$

4.206.

$$0.49$$

4.207.

$$0.45$$

4.208.

$$\frac{1}{3}$$

4.209

$$\frac{2}{3}$$

4.210.

$$1.12$$

4.211.

$$4.29$$

4.212.

$$\ln a$$

Görbe ívhossza

4.213.

$$\frac{1}{4}\left(8\sqrt{65}-2\sqrt{5}+\operatorname{ar\,sh}8-\operatorname{ar\,sh}2\right)$$

4.214.

$$\operatorname{sh}3\approx 10.02$$

4.215.

$$\sqrt{37}-\sqrt{5}-\operatorname{ar\,sh}\frac{1}{6}+\operatorname{ar\,sh}\frac{1}{2}\approx 4.49$$

4.216.

$$1.32$$

4.217.

$$\frac{5\pi}{2}$$

4.218.

$$\frac{5\pi}{2}$$

4.219.

$$8a$$

4.220.

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

4.221.

$$63.3$$

Forgástestek térfogata

4.222.

$$V=\pi\int_0^2 e^{4x}\,dx=\pi\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_0^2=\frac{\pi}{4}\left(e^8-1\right)$$

4.223

$$\pi\cdot\ln 4$$

4.224.

$$\frac{127\pi}{63}$$

4.225.

$$\frac{16\pi}{3}$$

4.226.

$$\frac{16\pi}{15}$$

4.227.

$$12\pi$$

4.228.

$$\frac{\pi}{15}$$

4.229.

$$V = \pi \int_0^\pi \cos^4 x \; dx = \pi \int_0^\pi \left(\frac{1+\cos(2x)}{2} \right)^2 \; dx = \frac{\pi}{4} \int_0^\pi 1 + 2\cos(2x) + \frac{1+\cos 4x}{2} \; dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} \left[x + \sin 2x \right]_0^\pi + \frac{\pi}{8} \left[x + \frac{\sin 4x}{4} \right]_0^\pi = \frac{3\pi^2}{8}$$

4.230.

$$6\pi$$

4.231.

$$\frac{4}{3} ab^2 \pi$$