5. fejezet

Differenciálegyenletek

5.1. Differenciálegyenletek

5.1.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

5.1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket, és ábrázoljunk néhány megoldást.

a) $y' = x.$

b) $y' = y.$

c) $y' = xy.$

5.2. Határozzuk meg a

$$\sin(x)\cos^3(x) + (\cos(x)+1)\sin(y)y' = 0$$

differenciálegyenletnek a $P\left(2\pi, \frac{\pi}{4}\right)$ ponton átmenő partikuláris megoldását.

Oldjuk meg az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenleteket.

5.3. $y^2 - 1 = (2y + xy)y'.$

5.4. $xy' + y = y^2.$

5.5. $2(xy + x - y - 1) = (x^2 - 2x)y'.$

5.6. $xy + \sqrt{1-x^2}\, y' = 0.$

5.7. $(x + xy^2)\, y' - 3 = 0.$

5.8. $\sqrt{1-y^2} = \sqrt{1+x^2}y'.$

5.9. $\sqrt{1-y^2} = (1-x^2)\, y'.$

5.10. $\sin(y) = e^x\, y'.$

5.11. $(1+x^2)\, y' = \sqrt{1-y^2}.$

5.12. $x(1+y^2) + (1+x^2)\, y' = 0.$

5.13. $xy\, y' - (1-y^2) = 0.$

5.14. $y(4+9x^2) = \frac{1}{y'}.$

5.15. $\sin(x)y' = \sin(y).$

5.16. $(2x+1)y' + y^2 = 0.$

5.17. $(1+2y)x + (1+x^2)y' = 0.$

5.18. $y' \sin(x)\sin(y) + 5\cos(x)\cos^3(y) = 0.$

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, mely az adott kezdeti feltételeket kielégíti.

5.19.

$$\frac{yy'}{1+x} = \frac{x}{1+y};$$

a) $y(1) = 1$ b) $y(0) = 1$

5.20. $y' \sin(x) = y\ln(y), \quad y(0) = 1.$

5.21. $yy' = \frac{e^x}{1+e^x}, \quad y(1) = 1.$

5.22. $x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}y' = 0, \quad y(0) = 1.$

5.23. $2y = y', \quad y(0) = 1.$

5.24. $y\ln(y) + xy' = 0, \quad y(1) = 1.$

$\boxed{\textbf{5.25.}}$ Határozzuk annak a görbeseregnek az egyenletét, melyben mindegyik görbéjére fennáll a következő tulajdonság: bármely (x, y) koordinátájú P pontjához tartozó normálisának az x tengelyig terjedő darabja ugyanakkora, mint a P pontnak az origótól mért távolsága.

$\boxed{\textbf{5.26.}}$ Mi az egyenlete annak a görbének, melyben a görbe alatti terület az a és x abszcisszájú pontok között arányos a pontok közötti görbék hosszával?

5.27. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél a szubtangens hosszúsága egy rögzített a állandóval egyenlő.

5.28. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél a szubnormális állandó.

5.1.2. Lineáris differenciálegyenletek

$\boxed{\textbf{5.29.}}$ Oldjuk meg az

$$y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

$\boxed{\textbf{5.30.}}$ Határozzuk meg az

$$y' = \frac{1}{\sin(x)}y + \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg a $P\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ponton áthaladó partikuláris megoldást.

$\boxed{\textbf{5.31.}}$ Írjuk fel az

$$\frac{1}{x}y' = -y + 1$$

differenciálegyenletnek a $P(0,7)$ ponton átmenő megoldását.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

5.32. $y' = xy + x^3$.

5.33. $y'\cos(x) + y\sin(x) = 1$.

5.34. $y' - \frac{2}{x}y = x^2e^x$.

5.35. $(x^2-1)y' = xy + x^2$.

5.36. $y' + y\,\mathrm{tg}\,(x) = \sin(2x)$.

5.37. $y'y + \mathrm{th}\,x = 6e^{2x}$.

5.38. $y'\cos(x) - 3y\sin(x) = \mathrm{ctg}\,(x)$.

5.39. $xy' + 2y = x^4$.

5.40. $y' + y = \sin(2x)$.

5.41. $y'x\ln(x) - y = x^2(2\ln(x) - 1)$.

5.42. $y'\sin(x) - y\cos(x) = e^x\sin^2(x)$.

5.43. $xy' + y = x\ln|x|$.

Számítsuk ki az alábbi differenciálegyenleteknek az adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldását:

5.44. $xy' + 2y = 3x, \qquad y(1) = 1.$

5.45. $(1 - x^2)y' + xy = 1, \qquad y(0) = 1.$

5.46. $y' + 2xy = 3xe^{-x^2}, \qquad y\left(\sqrt{\ln 2}\right) = \dfrac{1}{2}(1 + \ln 2).$

5.47. $y' + y\cos(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x), \qquad y(0) = 1.$

5.48. $y' + x^2y = x^2, \qquad y(2) = 1.$

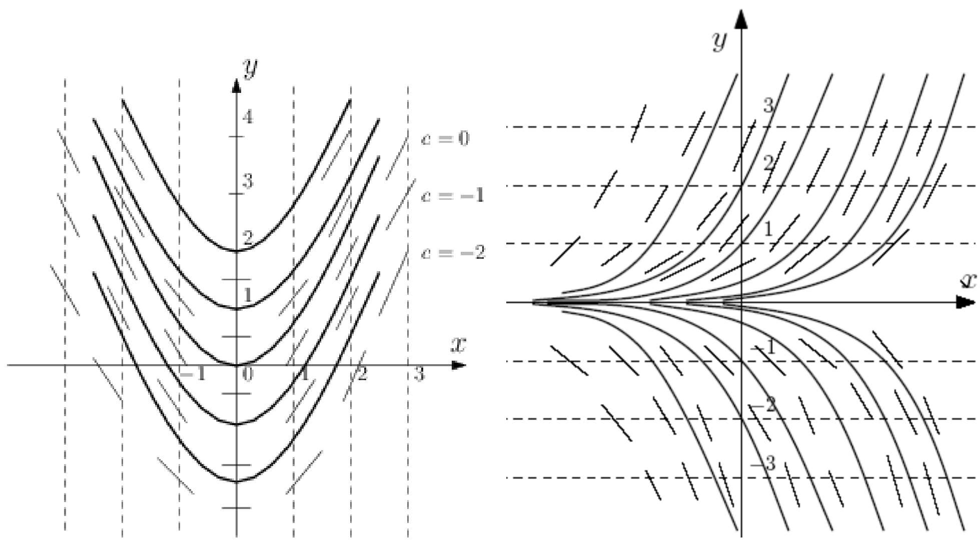
5.49. $xy' + y + xe^x = 0, \qquad y(1) = 0.$

5.2. Differenciálegyenletek. Megoldások

5.2.1. Szeparábilis differenciálegyenletek

5.1. a) A differenciálegyenlet általános megoldása az $y = \dfrac{x^2}{2} + C$ görbesereg.

A megoldásfüggvények grafikonja (az ún. integrálgörbék) olyan parabolák, melyek tengelye az y tengellyel esik egybe.



5.1. ábra. 5.1. feladat a) és b) rész

c) Az általános megoldás: $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$.

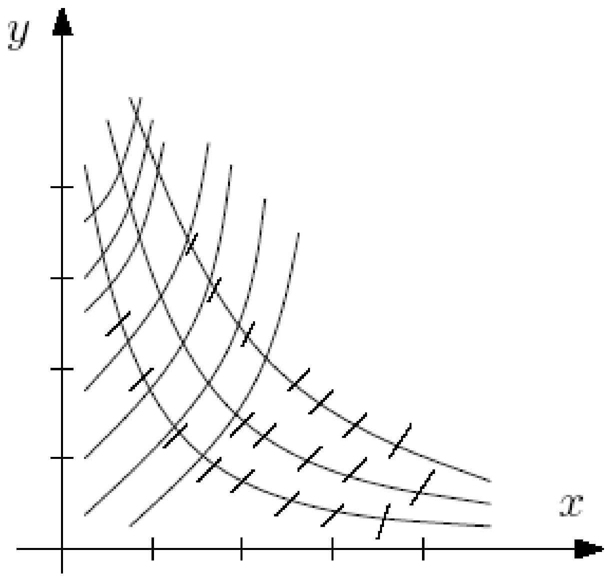
Néhány integrál görbe grafikonja:

5.2. A változókat szétválasztva:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}dx + c$$

Az egyenlőség jobboldalán álló integrálban a számláló a nevező deriváltja, ezért:

$$\int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)+1}dx + \ln C = \ln C(\cos(x)+1).$$



5.2. ábra. 5.1 feladat

A baloldalon $u = \cos(y)$ helyettesítéssel számolunk. Ekkor $du = -\sin(y)dy$, s így:

$$\int \frac{\sin(y)}{\cos^3(y)}dy = -\int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\cos^2(y)}.$$

Innen a számolás lépései:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\cos^2(y)} &= \ln C(\cos(x)+1) \\
2\cos^2(y) &= \frac{1}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
1+\cos(2y) &= \frac{1}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
\cos(2y) &= \frac{1-\ln C(\cos(x)+1)}{\ln C(\cos(x)+1)} \\
y &= \frac{1}{2}\cdot \arccos\left(\frac{1-\ln C(\cos(x)+1)}{\ln C(\cos(x)+1)}\right)
\end{aligned}$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Válasszuk ki ezek közül a keresett partikuláris megoldást!

Mivel $P\left(2\pi, \frac{\pi}{4}\right)$ ponton áthaladó megoldást keresük, $y(2\pi) = \frac{\pi}{4}$ kell legyen.

$$\frac{\pi}{2} = \arccos\cdot\frac{1-\ln 2C}{\ln 2C}.$$

Azaz:

$$\frac{\pi}{2} = \arccos\left(\frac{1-\ln 2C}{\ln 2C}\right).$$

Az egyenlőség mindkét oldalának cosinusát véve:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1-\ln 2C}{\ln 2C} = 0,$$

innen:

$$\begin{aligned} 1-\ln 2C &= 0 \\ 1 &= \ln 2C \\ e &= 2C \end{aligned}$$

azaz $C = \dfrac{e}{2}$ és így

$$y = \frac{1}{2}\arccos\left(\frac{1-\frac{1}{2}\ln(\cos(x)+1)}{\frac{1}{2}\ln(\cos(x)+1)}\right)$$

5.3. $y^2 - 1 = C(x+2)^2, \quad y = \pm 1.$

5.4. $y = \dfrac{1}{1-Cx}, \quad y = 0,\ y = 1.$

5.5. $C(y+1) = x(x-2), \quad y = -1.$

5.6. $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}, \quad y = 0.$

5.7. $3y + y^3 = 9\ln Cx.$

5.8. $y = \sin(\operatorname{sh}^{-1} x + C), \quad y = \pm 1.$

5.9. $y = \sin(\operatorname{th}^{-1} x + C), \quad y = \pm 1,\ x = \pm 1.$

5.10. $x = -\ln\left(-\ln C \cdot \operatorname{tg}\frac{y}{2}\right), \quad y = k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.11. $y = \sin(\arctan x + C), \qquad y = \pm 1.$

5.12. $y = \operatorname{tg}\left(\ln\dfrac{C}{\sqrt{1+x^2}}\right).$

5.13. $y = \dfrac{1}{Cx}\cdot\sqrt{C^2x^2-1}.$

5.14. $3y^2 = \arctan\dfrac{3x}{2} + C.$

5.15. $y = 2\arctan\left(C + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right), \quad , \; k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

5.16. $y = \dfrac{1}{\ln C\sqrt{2x+1}}, \quad y = 0$

5.17. $y = \dfrac{C}{2(1+x^2)} - \dfrac{1}{2}$

5.18. $\dfrac{1}{\cos^2 y} = -10 \ln \sin(x) + C$

5.19.
1. a.) $y = x$
2. b.) $2\,(x^3 - y^3) + 3\,(x^2 - y^2) + 5 = 0$

5.20. $y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

5.21. $y^2 - 1 = 2\ln\left(e^x + 1\right) - 2\ln(e+1)$.

5.22. $(1-x^2)^{3/2} + (1-y^2)^{3/2} = 1$

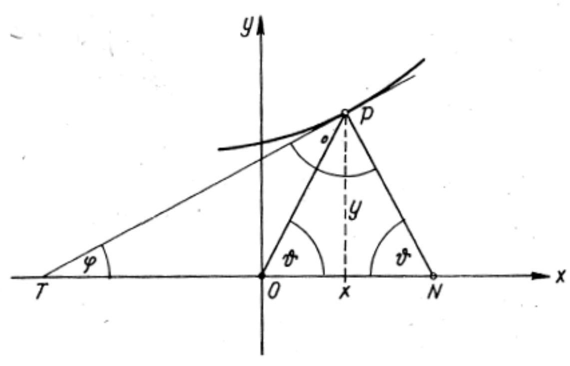
5.23. $y = e^{2x}$

5.24. $y = 1$

5.25. A feladatnak megfelelő ábrából leolvasható, de az adott feltételekből is következik, hogy:

$$\overline{OP} = \overline{PN} \text{ és } \overline{PN} \perp \overline{PT}.$$

Tehát



5.3. ábra. 5.25 feladat

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \cot\vartheta.$$

Másrészt:

$$\cot\vartheta = \frac{x}{y}.$$

Ezek felhasználásával a görbesereg differenciálegyenlete:

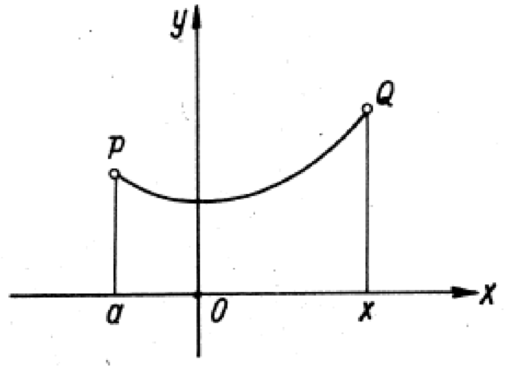
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}.$$

A változókat szétválasztva:

$$y^2 - x^2 = C.$$

Az integrálgörbék olyan hiperbolák, melyeknek valós tengelye az y tengely.

5.26. Legyen $\widehat{PQ}$ a görbe íve az a és x abszcisszák között. A görbe alatti terület



5.4. ábra. 5.26 feladat

$$\int_a^x y(t)dt,$$

az ívhossz pedig

$$\int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}dt.$$

Ha a görbe alatti terület arámyos az ívhosszal, akkor fennáll:

$$\int_a^x y(t)dt = k\int_a^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2}dt.$$

Az egyenlőség mindkét oldalát x szerint differenciálva, az

$$y(x) = k\sqrt{1+[y'(t)]^2} \text{ ill. } y' = \pm\frac{1}{k}\sqrt{y^2-k^2}$$

differenciálegyenlethez jutunk.

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-k^2}} &= \pm\frac{1}{k}\int dx \\
\cosh^{-1}\frac{y}{k} &= \pm\frac{x+C}{k}
\end{aligned}$$

Megoldva y-ra:

$$y = k\cosh\frac{x+C}{k}.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása, ezenkívül partikuláris megoldás az $\sqrt{y^2-k^2}=0$ egyenletből adódó $y=\pm k$ is.

5.27. $y = Ce^{\frac{x}{a}}$

5.28. $y^2 = 2p(x+C)$

5.2.2. Lineáris differenciálegyenletek

5.29. Az $y' = -2xy + 2xe^{-x^2}$ differenciálegyenlethez tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$Y' = -2xY.$$

Ezt a változók szétválasztásával oldjuk meg:

$$\begin{aligned}
\int\frac{dY}{Y} &= -2\int x\,dx \\
\ln Y &= -x^2 + \ln C
\end{aligned}$$

azaz $\ln\frac{Y}{C} = -x^2$.

A homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = Ce^{-x^2}.$$

Az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálása módszerével állítjuk elő:

$$y_0 = C(x)\cdot e^{-x^2} \qquad y_0' = \left[C'(x) - 2x\cdot C(x)\right]e^{-x^2}$$

Behelyettesítük az inhomogén differenciálegyenletbe:

$$[C'(x) - 2x \cdot C(x)]\, e^{-x^2} = [-2x \cdot C(x)]\, e^{-x^2} + 2xe^{-x^2}$$

Innen:

$$C'(x)e^{-x^2} = 2x \cdot e^{-x^2},$$

ezután szorzunk az e^{x^2} kifejezéssel: $C'(x) = 2x$. Az egyenlőség mindkét oldalát integrálva $C = x^2$, így:

$$y_0(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}.$$

A keresett általános megoldás a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának az összege:

$$y(x) = \left(x^2 + C\right) e^{-x^2}.$$

5.30. $y' = \dfrac{1}{\sin(x)} y + \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}.$

A homogén egyenlet megoldása: $Y' = \dfrac{1}{\sin(x)} Y$

$$\begin{aligned}
\frac{dY}{Y} &= \frac{1}{\sin(x)} dx \\
\int \frac{dY}{Y} &= \int \frac{1}{\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} dx = \int \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} dx \\
\ln Y &= \ln\left(C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).
\end{aligned}$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát

$$Y(x) = C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Az inhomogén egyenlet megoldása állandók variálásával:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= C(x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\
y_0'(x) &= C'(x) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{C(x)}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$C' \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{C}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin(x)} \cdot C \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

Mivel

$$C'(x)\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

tehát

$$\begin{aligned} C'(x) &= 1,\ \text{azaz } C(x)=x.\\ y_0(x) &= x\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y(x)=(C+x)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

$P\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ ponton áthaladó megoldást úgy kaphatunk, ha az általános megoldásban a C állandót megfelelő módon határozzuk meg:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi=\left(C+\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=C+\frac{\pi}{2}.$$

Innen: $C=\frac{\pi}{2}$.

Tehát a partikuláris megoldás:

$$y(x)=\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

5.31. Feladatunk az $\frac{1}{x}y'=-y+1$ differenciálegyenletnek az $y(0)=7$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának meghatározása.

A feladatot az $y'=a(x)y+b(x)$ egyenlet megoldására levezetett

$$y(x)=e^{\int a(x)dx}[c+\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx]$$

képlettel oldjuk meg.

Előbb azonban az egyenletet y' együtthatójával el kell osztani:

$$y'=-xy+x.$$

Innen

$$y(x)=e^{-\int xdx}[c+\int xe^{\int xdx}dx]=$$

$$=e^{-\frac{x^2}{2}}[c+\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx]=$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}[c + e^{\frac{x^2}{2}}]$$

Tehát

$$y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 1$$

A $P(0,7)$ ponton átmenő megoldást a $7 = ce^0 + 1$ egyenletből kapjuk, $c = 6$, így

$$y_0(x) = 6e^{-\frac{x^2}{2}} + 1.$$

5.32. $y(x) = Ce^{\frac{x^2}{2}} - (x^2 + 2)$.

5.33. $y(x) = \sin(x) + C\cos(x)$.

5.34. $y(x) = x^2(e^x + C)$.

5.35. $y(x) = \sqrt{x^2 - 1}\left[C + \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right] - x$.

5.36. $y(x) = C\cos(x) - 2\cos^2(x)$.

5.37. $y(x) \cdot \operatorname{ch} x = 3e^x + e^{3x} + C$.

5.38. $y(x) = \dfrac{C + \ln\sin(x)}{\cos^3 x} + \dfrac{1}{2\cos(x)}$.

5.39. $y(x) = \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{C}{x^2}$.

5.40. $y(x) = Ce^{-x} + \dfrac{1}{5}\sin(2x) - \dfrac{2}{5}\cos(2x)$.

5.41. $y(x) = C\ln x + x^2$.

5.42. $y(x) = (C + e^x)\sin(x)$.

5.43. $y(x) = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{2}x\ln|x| - \dfrac{1}{4}x$.

5.44. $y(x) = x$.

5.45. $y(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

5.46. $y(x) = (x^2 + 1)e^{-x^2}$.

5.47. $y(x) = 2e^{-\sin(x)} + \sin(x) - 1$.

5.48. $y(x) = 1$.

5.49. $y(x) = e^x\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$.