

# Matematika szigorlat

Mintafeladatok az Matematikai Analízis írásbeli részhez

2016.

1.) Írja fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget.

2.) Bizonyítsa be teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.) Bizonyítsa be teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4.) Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy minden  $n > 4$ ,  $n \in \mathbb{N}$  esetén:

$$2^n > n^2.$$

5.) Bizonyítsa be teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy konvergensek vagy divergensek. A konvergens sorozatoknak adja meg a határértékét:

6.)  $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}.$

7.)  $a_n = \frac{n^2 + 1}{10^5 n + 2}$

8.)  $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}.$

9.)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$

10.)  $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n.$

Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

11.)  $a_n = \frac{10^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$

12.) (Rekurzív megadású sorozat:)

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{4}, \quad n = 1, 2, \dots$$

13.)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}.$

Írja fel az alábbi sorok  $n$ -dik részletösszegét. Ha a sor konvergens, adja meg az összegét:

14.)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$

15.)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}.$

16.)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k.$

17.)  $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}.$

18.)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$

19.)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}.$

Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensnek:

20.)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$

21.)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}.$

22.)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k(k+1)}.$

23.)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)}.$

24.)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+1}.$

Számítsa ki az alábbi határértékek közül, amelyek léteznek:

$$\begin{array}{ll}
25.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x} & 26.) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5} \\
27.) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right) & 28.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x} \\
29.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} & 30.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\operatorname{tg}(3x)} \\
31.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{x} & 32.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}
\end{array}$$

Deriválja az alábbi függvényeket:

$$\begin{array}{ll}
33.) \quad f(x) = (x^3 + 1)^2 & 34.) \quad f(x) = \sin \sqrt{x+3} \\
35.) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{array}$$

Számolja ki az alábbi határértékeket:

$$\begin{array}{ll}
36.) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} =? & 37.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x} =? \\
38.) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{tg} x} =?
\end{array}$$

Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvények gráfját:

$$\begin{array}{ll}
39.) \quad f(x) = x^3 - 2x & 40.) \quad f(x) = \frac{2x+3}{x+1} \\
41.) \quad f(x) = x \cdot e^{-x}
\end{array}$$

Írja fel az alábbi függvények  $x_0 = 0$ -hoz tartozó adott fokú Taylor polinomját:

$$\begin{array}{ll}
42.) \quad f(x) = e^x, \quad T_1(x) =? & 43.) \quad f(x) = \sin x, \quad T_5(x) =? \\
44.) \quad f(x) = \ln x, \quad T_5(x) =?
\end{array}$$

Számítsa ki az alábbi függvény közelítő értékét az  $x_1$  pontban a megadott fokú Taylor polinom segítségével és becsülje meg a hibát:

45.)  $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_1 = 10, \quad T_1(x) .$

46.)  $f(x) = \cos x, \quad x_1 = 28^\circ, \quad T_1(x).$

47.)  $f(x) = \ln x, \quad x_1 = 1.3, \quad T_4(x) .$

Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényét:

48.)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$

49.)  $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x.$

50.)  $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}.$

51.)  $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}.$

52.)  $f(x) = x \cdot \sin(x^2).$

53.)  $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}.$

Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

54.)  $\int_0^1 x e^x dx = ?$

55.)  $\int_1^e x \ln(x) dx = ?$

56.)  $\int_0^{\pi/4} x \sin(x) dx = ?$

57.)  $\int_0^{\pi/4} x \cos(x) dx = ?$

58.)  $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx = ?$

59.)  $\int_0^{\pi/4} \sin^3(x) dx = ?$

Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, és indokolja!

60.)  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx.$

61.)  $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

62.)  $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} dx.$

Írja fel a differenciálegyenletek megoldását az adott kezdetifeltételek mellett:

63.)

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 2.$$

64.)

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

65.)

$$y' = -2y, \quad y(2) = 1.$$

Írja fel az alábbi függvények Fourier-sorát

66.)

$$f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

67.)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{ha } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$$

67.)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$$

68.)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\pi} - 1 & \text{ha } 0 < x < 2\pi, \\ 0 & \text{ha } x = 2\pi. \end{cases}$$

70.) Adja meg polárkoordinátákkal a  $P_1(2, 2\sqrt{3})$  és a  $P_2(2, -2\sqrt{3})$  pontokat.

Adja meg derékszögű (Descartes) ill. polárkoordinátákkal az alábbi síkbeli tartományokat:

71.) Az origó középpontú,  $R > 0$  sugarú zárt körlemez.

72.)  $(a, 0)$  középpontú,  $a > 0$  sugarú zárt körlemez.

73.)  $y$ -tengellyel párhuzamos, tőle  $a > 0$  távolságra haladó egyenes és az  $y$ -tengely közé eső zárt tartomány.

74.) Legyen  $A > 0$  rögzített szám. "Ábrázoljuk" a következő függvényt (grafikon vázlata, megnevezése, szintvonalak):

$$f(x, y) = A - x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

75.)

$$f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$$

76.)

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$$

77.)

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Határozzuk meg az  $f(x, y) = x^3 y^2$  függvény  $P_0(-1, 2)$  pontbeli iránymenti deriváltját az alábbi irányok mentén:

78.)  $v = (4, -3)$ .

79.)  $\alpha = 120^\circ$ .

80.) Az  $A(1, 2)$  pontból a  $B(2, 5)$  pontba mutató irány.

81.) Írjuk fel az  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  függvény grafikonjához a  $P_0 = (1, 2)$  pontban húzott érintősík egyenletét.

Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit:

82.)  $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y.$

83.)  $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3.$

Deriváljuk az alábbi  $y = f(x)$  implicit függvényeket:

84.)  $xy^2 + 3x^2y - 5x = 0.$

85.)  $(y + 1) \sin(xy^2) = 0.$

86.) Írja fel a gömbi polárkoordináták segítségével az origó középpontú egységgömb felső térrészbe eső felét.

87.) Egy  $R$  négyszögtartomány csúcsai:  $A(1; -1)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(4; 2)$ ,  $D(1; 2)$ . Határozza meg az alábbi integrált:

$$\iint_R (xy^2 + 3x^2y) d(x, y) = ?$$

88. Legyen  $S$  az origó középpontú egységkör.

$$\iint_S (x^2 + y^2) d(x, y) = ?$$

89. Legyen  $S$  az origó középpontú egységkör felső félsíkba eső fele, ahol  $y \geq 0$ .

$$\iint_S (x^2 + y^2) d(x, y) = ?$$

90. Legyen  $S$  az origó középpontú egységgömb.

$$\iiint_S 1 d(x, y, z) = ?$$

92.) Írja fel  $f(z) = z^2$  komplex függvény kanonikus alakját.

93.) Írja fel  $f(z) = \frac{1}{z}$  komplex függvény kanonikus alakját.

94.) Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' + y = 0.$$

95.) Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - y = 0.$$

96.) Írja fel a differenciálegyenletnek a kezdetiértékhez tartozó partikuláris megoldását:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

97.) Írja fel a differenciálegyenletnek a peremértékhez tartozó partikuláris megoldását:

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 2.$$