

Matematika szigorlat

Mintafeladatok az írásbeli részhez

- 1.) Írja fel a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget.
- 2.) Igazoljuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség alkalmazásával, $\forall n \in \mathbb{N}$ -re, tetszőleges $a_1, \dots, a_n > 0$ esetén

$$(a_1 + \dots + a_n) \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2.$$

- 3.) Adott $k > 0$ kerületű téglalapok közül melyik a legnagyobb területű?
- 4.) Bizonyítsa be teljes indukcióval: $2^n > n^2$, ha $n > 4$, $n \in \mathbb{N}$.
- 5.) Bizonyítsa be teljes indukcióval:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- 6.)-9.) Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy melyik konvergens, melyik divergens és a konvergenseknek adja meg a határértékét:

6.) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$.

8.) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}$.

9.) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

- 11.)-13.) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

11.) $a_n = \frac{10^n}{n!}$.

12.) $a_n = \sqrt[n]{n}$.

13.) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{2n+3}$.

- 14.)-19.) Írja fel az alábbi sorok n -dik részletösszegét és ha konvergens, adja meg a sor összegét:

$$14.) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

$$16.) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k.$$

$$17.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$18.) \sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}.$$

20.)-24.) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergensek:

$$20.) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

$$21.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}.$$

$$22.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}.$$

$$24.) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right).$$

25.)-32.) Számítsa ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

$$25.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}.$$

$$27.) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right).$$

$$30.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}.$$

$$31.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}.$$

33.)-36.) Deriválja az alábbi függvényeket:

33.) $f(x) = (x^3 + 1)^2$.

34.) $f(x) = \sin \sqrt{x+3}$.

37.)-39.) Számolja ki az alábbi határértékeket:

37.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

38.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$.

40.)-41.) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény grafikonját:

40.) $f(x) = x^3 - 2x$.

41.) $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

42.)-44.) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó adott fokú Taylor polinomját:

42.) $f(x) = e^x$, $T_1(x) = ?$

43.) $f(x) = \sin x$, $T_5(x) = ?$

45.)-47.) Számítsa ki az alábbi függvény közelítő értékét az adott x_1 pontban a megadott fokú Taylor polinom segítségével és becsülje meg a hibát:

45.) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_1 = 10$, $T_1(x)$.

47.) $f(x) = \ln x$, $x_1 = 1.3$, $T_4(x)$.

48.)-54.) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényét:

48.) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

50.) $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$.

51.) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$.

52.) $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$.

53.)) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}$.

55.)-59.) Számítsa ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumban:

55.) $\int_1^e x \ln x dx$.

56.) $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$.

59.) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx$.

60.)-62.) Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, és indokolja!

60.) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx$.

61.) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

62.) $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$.

63.)-65.) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet megoldását:

63.)

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 2.$$

64.)

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

65.)

$$y' = -2y, \quad y(2) = 1.$$

66.)-67.) Írjuk fel az alábbi függvények Fourier-sorát

66.)

$$f(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

67.)

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{ha } -\pi < x \leq 0, \\ x & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ \frac{\pi}{2} & \text{ha } x = \pi. \end{cases}$$

68.)-69.) Adja meg paraméteresen az alábbi, \mathbb{R}^2 -beli görbéket:

68.) Az origó középpontú, $r > 0$ sugarú kör.

69.) Az origót és az $(1, 1)$ pontot összekötő szakasz.

70.) Adja meg polárkoordinátákkal a $P_1(2, 2\sqrt{3})$ és a $P_2(2, -2\sqrt{3})$ pontokat.

71.)-73.) Adjuk meg derékszögű (Descartes) ill. polárkoordinátákkal az alábbi (síkbeli) tartományokat:

71.) Az origó középpontú, $R > 0$ sugarú zárt körlemez.

72.) $(a, 0)$ középpontú, $a > 0$ sugarú zárt körlemez.

73.) y -tengellyel párhuzamos, tőle $a > 0$ távolságra haladó egyenes és az y -tengely közé eső zárt tartomány.

74.) Legyen $A \in \mathbb{R}$ rögzített szám. "Ábrázoljuk" a következő függvényt (grafikon vázlata, megnevezése, szintvonalak):

$$f(x, y) = A - x^2 - y^2 \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2).$$

75.)-77.) Számítsuk ki az alábbi függvények parciális deriváltjait:

75.)

$$f(x, y) = \operatorname{tg}(3x - 5y)$$

76.)

$$f(x, y) = \ln \sqrt{x^7 y^4}$$

77.)

$$f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

78.)-80.) Határozzuk meg az $f(x, y) = x^3 y^2$ függvény $P_0(-1, 2)$ pontbeli iránymenti deriváltját az alábbi irányok mentén:

78.)

$$v = (4, -3)$$

79.)

$$\alpha = 120^\circ$$

80.) Az $A(1, 2)$ pontból a $B(2, 5)$ pontba mutató irány.

81.) Írjuk fel az $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ függvény grafikonjához a $P_0 = (1, 2)$ pontban húzott érintősík egyenletét.

82.)-83.) Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények lokális szélsőértékeit:

82.) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y.$

83.) $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3.$

84.)-85.) Deriváljuk az alábbi $y = f(x)$ implicit függvényeket:

84.) $xy^2 + 3x^2y - 5x = 0.$

85.) $(y + 1) \sin(xy^2) = 0.$

86.) Írja fel a gömbi polárkoordináták segítségével az origó középpontú egységgömb felső térrészbe eső felét.

87.) Egy R négyszögtartomány csúcsai: $A(1; -1)$, $B(4; -1)$, $C(4; 2)$, $D(1; 2)$. Határozza meg az alábbi integrált:

$$\iint_R xy^2 + 3x^2y d(x, y) = ?$$

88.) Legyen S az origó középpontú egységgömb.

$$\iiint_S 1 \, d(x, y, z) = ?$$

89.) Legyen $f(t)$ az egységugrás függvény, azaz

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

Mennyi a Laplace transzformáltja?

90.) Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

Mennyi a Laplace transzformáltja?

91.)

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{ha } x \geq 0, \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases}.$$

Mennyi a Laplace transzformáltja?

92.) Írja fel $f(z) = z^2$ komplex függvény kanonikus alakját.

93.) Írja fel $f(z) = \frac{1}{z}$ komplex függvény kanonikus alakját.

94.) Írja fel az

$$y'' + y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

95.) Írja fel az

$$y'' - y = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

96.) Írja fel az

$$y'' + y = 0$$

differenciálegyenletnek az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti értékhez tartozó megoldását.

97.) Írja fel az

$$y'' + y = 0$$

differenciálegyenletnek az $y(0) = 1$, $y(\pi) = 2$ perem értékhez tartozó megoldását.