

Analízis I. feladatsor.

Gyakorlásként Pótzh-ra

1.)-5.) Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy

1.)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2.)

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

3.)

$$\sum_{k=1}^n k(3k+1) = n(n+1)^2$$

4.)

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

5.)

$$\sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1.$$

6.)-10.) Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy melyik konvergens, melyik divergens és a konvergenseknek adja meg a határértékét:

6.) $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}.$

7.) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}.$

8.) $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}.$

9.) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

10.) $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3}$.

11.)-13.) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

11.) $a_n = \frac{10^n}{n!}$.

12.) $a_n = {}^n\sqrt{n}$.

13.) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$.

14.)-19.) Irja fel az alábbi sorok n -dik részletösszegét és ha konvergens, adja meg a sor határértékét:

14.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

15.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$.

16.) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$.

17.) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

18.) $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$.

19.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k}{6^k}$.

20.)-24.) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergensek vagy divergenssek:

20.) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

$$21.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}.$$

$$22.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}.$$

$$23.) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}.$$

$$24.) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1} \right).$$

25.)-32.) Számítsa ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

$$25.) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}.$$

$$26.) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}.$$

$$27.) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$$

$$28.) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5}.$$

$$29.) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \right).$$

$$30.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}$$

$$31.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$$

$$32.) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

33.)-36.) Deriválja az alábbi függvényeket:

33.)

34.) $f(x) = (x^2 + 2) \sin \sqrt{x + 3}$.

35.) $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

36.) $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2x$.

37.)-39.) Számolja ki az alábbi határértékeket:

37.) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

38.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$.

39.) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg} x$.

40.)-41.) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény grafikonját:

40.) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

41.) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

42.)-44.) Irja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ -hoz tartozó Taylor polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal:

42.) $f(x) = e^x, \quad T_1(x) = ?$

43.) $f(x) = \sin x, \quad T_5(x) = ?$

44.) $f(x) = \ln x, \quad T_5(x) = ?$

45.)-47.) Számítsa ki az alábbi függvény közelítő értékét az adott x_1 pontban a megadott fokú Taylor polinom segítségével és becsülje meg a hibát:

45.) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_1 = 10, \quad T_1(x)$.

46.) $f(x) = \cos x, \quad x_1 = 28^\circ, \quad T_1(x)$.

47.) $f(x) = \ln x$, $x_1 = 1.3$, $T_4(x)$.

48.)-54.) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényét:

48.) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

49.) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

50.) $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$.

51.) $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}$.

52.) $f(x) = x \cdot \sin(x^2)$.

53.) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}$.

54.) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

55.)-59.) Számítsa ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumban:

55.) $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

56.) $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$.

57.) $\int_0^{\pi/4} x \cos x dx$.

58.) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}} dx$.

59.) $\int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx$.

60.)-62.) Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, és ha igen,

számolja ki az integrál értékét:

$$60.) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x-1)^2} dx.$$

$$61.) \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$62.) \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$