

1.)-4.) Oldja meg az alábbi egyenlőtlenségeket és ábrázolja a megoldáshalmazokat a számegyenesen:

1.) (61)  $\frac{x-1}{x+2} < 0$ .

2.) (62)  $\frac{x-3}{x-1} < \frac{1}{2}$ .

3.) (80)  $|x^2 + 6x + 10| \geq 1$ .

4.) (81)  $|2x| + |2x - 6| \geq 8$

5.) (48) Bizonyítsa be teljes indukcióval, hogy

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

6.)-10.) Döntse el az alábbi sorozatokról, hogy melyik konvergens, melyik divergens és a konvergenseknek adja meg a határértékét:

6.) (121)  $a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$ .

7.) (122)  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$ .

8.) (119)  $a_n = \frac{n^2 + 3n - 1}{n^3 - 7n^2 + 6n - 10}$ .

9.) (128)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .

10.) (129)  $a_n = \sqrt{2n-1} - \sqrt{n+3}$ .

11.)-13.) Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét:

11.) (158)  $a_n = \frac{10^n}{n!}$ .

12.) (160)  $a_n = \sqrt[n]{n}$ .

13.) (172)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n+3}$ .

14.)-19.) Irja fel az alábbi sorok  $n$ -dik részletösszegét és ha konvergens, adja meg a sor határértékét:

14.) (S1)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ .

15.) (S2)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-5}{4^k}$ .

16.) (S3)  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)^k$ .

17.) (S4)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ .

18.) (S26)  $\sum_{k=2}^{\infty} 10^{-k}$ .

19.) (S32)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 3^k + 3 \cdot 2^k}{6^k}$ .

20.)-24.) Vizsgálja meg, hogy az alábbi sorok konvergenssek vagy divergenssek:

20.) (S52)  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ .

21.) (S55)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{k^k}$ .

22.) (S59)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ .

23.) (S83)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k-1}}{k^k}$ .

24.) (S87)  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{2k+1}\right)$ .

25.)-32.) Számítsa ki az alábbi határértékek közül azokat, amelyek léteznek:

25.) (367)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x}.$

26.) (369)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5}.$

27.) (375)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1} \right).$

28.) (382)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 2x + 5}.$

29.) (399)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}).$

30.) (405)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{\sin(bx)}, \quad (\text{L'Hospital nélkül}).$

31.) (410)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}, \quad (\text{L'Hospital nélkül}).$

32.) (414)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}, \quad (\text{L'Hospital nélkül}).$

33.)-36.) Deriválja az alábbi függvényeket:

33.) (746)  $f(x) = (x^3 + 1)^2.$

34.) (751)  $f(x) = (x^2 + 2) \sin \sqrt{x+3}.$

35.) (765)  $f(x) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

36.) (753)  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} 2x.$

37.)-39.) Számolja ki az alábbi határértékeket:

37.) (897)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}.$

38.) (909)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x - x}$ .

39.) (900)  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1) \operatorname{ctg} x$ .

40.)-41.) Végezzen teljes függvényvizsgálatot és vázolja a függvény grafikonját:

40.) (933)  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ .

41.) (940)  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ .

42.)-44.) Irja fel az alábbi függvények  $x_0 = 0$ -hoz tartozó Taylor polinomját a Lagrange-féle maradéktaggal:

42.) (1002)  $f(x) = e^x, \quad T_1(x) = ?$

43.) (1002)  $f(x) = \sin x, \quad T_5(x) = ?$

44.) (1006)  $f(x) = \ln x, \quad T_5(x) = ?$

45.)-47.) Számítsa ki az alábbi függvény közelítő értékét az adott  $x_1$  pontban a megadott fokú Taylor polinom segítségével és becsülje meg a hibát:

45.) (1008)  $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_1 = 10, \quad T_1(x)$ .

46.) (1010)  $f(x) = \cos x, \quad x_1 = 28^\circ, \quad T_1(x)$ .

47.) (1013)  $f(x) = \ln x, \quad x_1 = 1.3, \quad T_4(x)$ .

48.)-54.) Határozza meg az alábbi függvények primitív függvényét:

48.) (1149)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

49.) (1156)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$ .

50.) (1159)  $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$ .

$$51.) \text{ (1170) } f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5}.$$

$$52.) \text{ (1173) } f(x) = x \cdot \sin(x^2).$$

$$53.) \text{ (1179) } f(x) = \frac{1}{2x^2 - 12x + 23}.$$

$$54.) \text{ (1198) } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

55.)-59.) Számítsa ki az alábbi függvények határozott integrálját a megadott intervallumban:

$$55.) \text{ (1294) } \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

$$56.) \text{ (1300) } \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx.$$

$$57.) \text{ (1297) } \int_0^{\pi/4} x \cos x dx.$$

$$58.) \text{ (1306) } \int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1 + 2\sqrt{x}} dx.$$

$$59.) \text{ (1307) } \int_0^{\pi/4} \sin^3 x dx.$$

60.)-62.) Döntse el, hogy konvergensek-e az alábbi improprius integrálok, és ha igen, számolja ki az integrál értékét:

$$60.) \text{ (1432) } \int_{-\infty}^0 \frac{1}{(2x - 1)^2} dx.$$

$$61.) \text{ (1439) } \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$62.) \text{ (1441) } \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$