Helyettesítés kettős integrálban

Polár koordináták

2013. április 15.

Integrálás általános tartományon

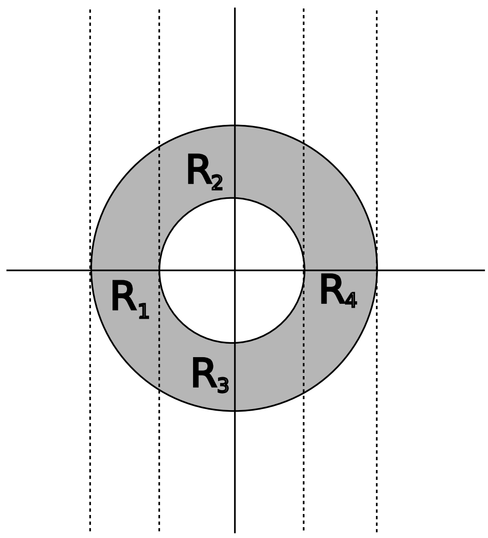
Ha az integrálási tartomány sem téglalap, sem normáltartomány, akkor megpróbálkozhatunk azzal, hogy felbontjuk egyszerűbb részekre. Példaképp tekintsünk egy körgyűrűt:

$$R = \{x^2 + y^2 = 1 \text{ és } x^2 + y^2 = 4 \text{ közötti terület}\}$$

Tegyük fel, hogy adott egy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, melynek integrálját ki kell számítani.

Közvetlenül nem megy.

Első lehetőség, hogy R-t az ábrán látható módon fel tudjuk osztani négy részre, melyek normáltartományok.



1. ábra. A körgyűrű felosztása négy tartományra

Ekkor az integrál négy integrál összegeként számolható:

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dydx + \int_{2}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx.$$

Másik megoldás az R tartomány polárkoordinátákkal való felírása. Ekkor az integrálási határok:

$$1 \leqslant r \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Így a megfelelő tartomány a polárkoordináta-rendszerben egy téglalap (intervallum) lesz.

$$R' = \{(r,\theta) : 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}.$$

Az integrál kiszámításakor azonban vigyázni kell.

Áttérés polárkoordinátákra

Polárkoordinátákat vezetünk be:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Ennek megfelelően egy tartomány megadása is változni fog. Tegyük fel, hogy most "szerencsések" vagyunk, és így változik a tartomány megadása:

$$R = \{(x,y) : x, y\ \} \quad \mapsto \quad R' = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in R\} = [a \times b] \times [\alpha \times \beta]\,.$$

Ez azt jelenti, hogy a polárkoordináták:

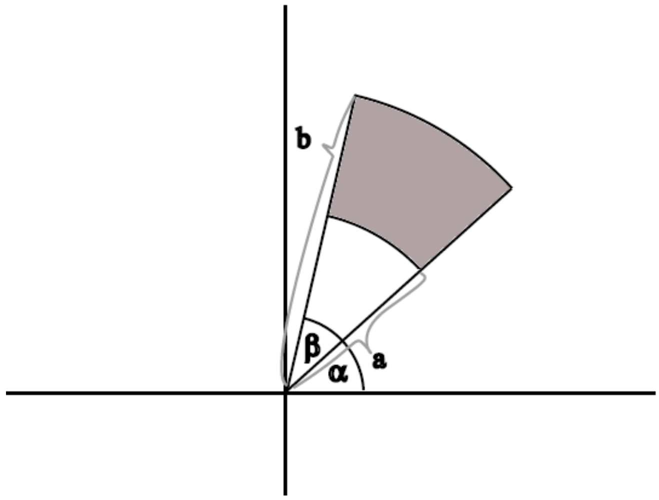
$$a \leqslant r \leqslant b, \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$

Tegyük fel, hogy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható. Hogyan számolható az integrál, ha (x,y) helyett áttérünk az (r,θ) polárkoordinátákra?

A Riemann integrál definícióját használjuk, közelítő összeget fogunk számolni. Osszuk fel $[a,b]$-t n részre, $[\alpha,\beta]$-t m részre. Az osztópontok:

$$a = r_0 < r_1 < \ldots < r_n = b, \qquad \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m = \beta.$$

A tartomány egy felosztását kapjuk: R'_{ij}, $i = 1,\ldots n;\ j = 1,\ldots m$.



2. ábra. Téglalap tartomány a polárkoordináta rendszerben.

A fenti felosztáshoz tartozó közelítő összeg (Riemann összeg):

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A(R_{ij}) f(x_i^*, y_j^*) = (*)$$

ahol (x_i^*, y_j^*) benne van az (i, j)-edik kis mezőben. Az $A(R_{ij})$ területet úgy kapjuk meg, hogy a külső határoló körszeletének vesszük a területét, és levonjuk az eggyel kisebb körszelet területét:

$$A(R_{ij}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) = \underbrace{(\theta_j - \theta_{j-1})}_{\Delta\theta_j}\underbrace{(r_i - r_{i-1})}_{\Delta r_i}\underbrace{(\frac{r_i + r_{i-1}}{2})}_{r_i^*}$$

Tehát a közelítő összeg kiszámítása így folytatható:

$$(*) = \sum_i \sum_j \underbrace{f(x_i^*, y_j^*) r_i^*}_{f(r_i^* \cos\theta_j^*, r_i^* \sin\theta_j^*) r_i^*} \Delta\theta_j \Delta r_i =$$

$$= \sum_i \sum_j g(r_i^*, \theta_j^*) \Delta r_i \Delta\theta_j \to \int_a^b \int_\alpha^\beta g(r, \theta) d\theta dr.$$

A fenti egyenletben szereplő új függvény: $g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta))\ r$.

Összefoglalva, azt kaptuk, hogy:

$$\iint_R f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ d\theta dr.$$

Tétel *Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, $R \subset \mathbb{R}^2$ egy mérhető tartomány. Az R-nek megfelelő tartomány polárkoordinátákban felírva:*

$$R' = \{(r, \theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta) \in R\}.$$

Ekkor az integrál helyettesítés így végezhető el:

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\ d(r,\theta).$$