Helyettesítés kettős integrálban

Polárkoordináták használata

2017. április 12.

Integrálás általános tartományon

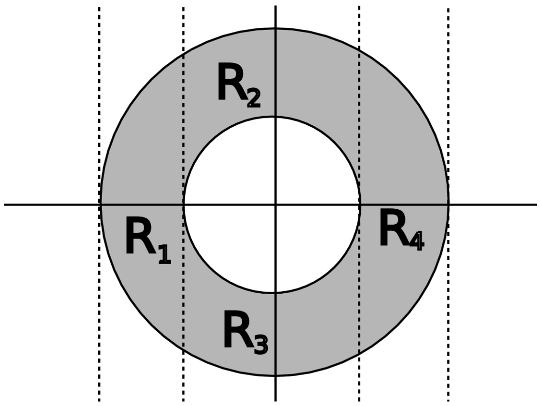
Ha az integrálási tartomány nem téglalap és nem normáltartomány, akkor megpróbálkozhatunk azzal, hogy felbontjuk egyszerűbb részekre.

Példaképp tekintsünk egy körgyűrűt:

$$R = \{x^2 + y^2 = 1 \text{ és } x^2 + y^2 = 4 \text{ közötti terület}\}$$

Adott egy $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, melynek integrálját ki kell számítani R-n. Közvetlenül nem megy.

Első megoldás, hogy R-t az ábrán látható módon felosztjuk 4 részre, melyek normáltartományok.



Ekkor az integrál négy integrál összegeként számolható:

$$\iint\limits_R f(x,y)d(x,y) = \int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\,dx + \int_{-1}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\,dx +$$

$$+\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\,dx.$$

Az integrál kiszámítása nem tűnik egyszerűnek.

Másik megoldás az R tartomány polárkoordinátákkal való átírása. Polárkoordináták segítségével írjuk fel a Descartes koordinátákat:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta.$$

Ekkor az integrálási határok:

$$1 \leqslant r \leqslant 2, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

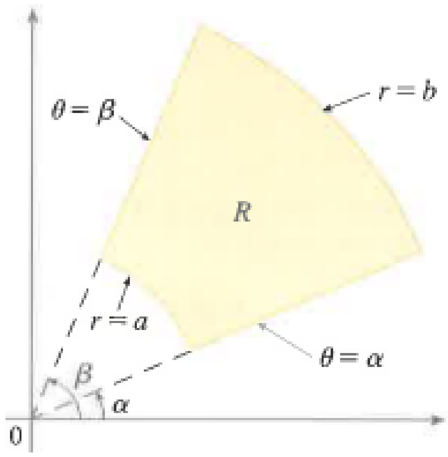
Így a polárkoordináta-rendszerben a megfelelő tartomány téglalap (intervallum) lesz.

$$R' = \{(r,\theta) : 1 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\} = [1,\,2] \times [0,\,2\pi]\,.$$

Az integrál kiszámításakor azonban vigyázni kell.

Áttérés polárkoordinátákra kettős integrálban

Tekintsünk egy téglalap tartományt a polárkoordináta rendszerben, legyen $R = [a,\,b] \times [\alpha\,\beta]\,.$



1. ábra. Téglalap tartomány a polárkoordináta rendszerben.

Ez azt jelenti, hogy a polárkoordinátákra az alábbi feltételek teljesülnek:

$$a \leqslant r \leqslant b, \qquad \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta.$$

Legyen $f : R \to \mathbb{R}$ integrálható függvény. Hogyan számolható az integrál, ha (x,y) helyett áttérünk az (r,θ) polárkoordinátákra?

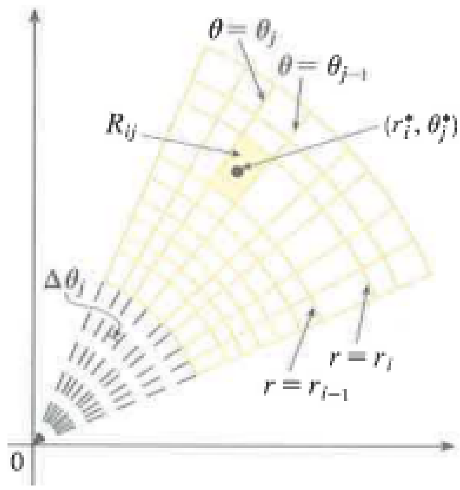
$$\iint\limits_{R} f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_{?} f(\dots)\dots d(r,\theta)?$$

A Riemann integrál definícióját használjuk, közelítő Riemann-összeget fogunk számolni. Osszuk fel $[a,b]$-t n részre, és $[\alpha,\beta]$-t m részre. Az osztópontok:

$$a = r_0 < r_1 < \dots < r_n = b, \qquad \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m = \beta.$$

Az integrálási tartomány egy felosztását kapjuk (polárkoordinátákban megadva):

$$R'_{ij} = \{r_{i-1} \le r \le r_i,\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j\}, \qquad i = 1, ...n;\ j = 1, ...m.$$



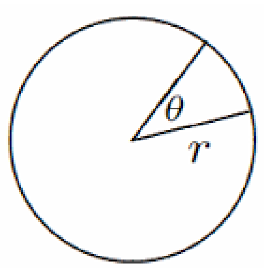
2. ábra. A polárkoordináták felosztásával kapott területek.

A fenti felosztáshoz tartozó közelítő Riemann összeg:

$$V_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} A(R_{ij}),$$

ahol $f_{ij} = f(x_i^*, y_j^*)$, valamely $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ választással.

Fel fogjuk használni, hogy egy r sugarú kör θ központi szögű körcikkének területe $t = \dfrac{1}{2} r^2 \cdot \theta$.



Ez alapján minden $1 \le i \le n$ ill. $1 \le j \le m$ esetén az $A(R_{ij})$ területet úgy kapjuk meg, hogy a külső határoló körszeletének vesszük a területét, és levonjuk az eggyel kisebb körszelet területét (a központi szög $\Delta\theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$):

$$A(R_{ij}) = \frac{1}{2} r_i^2 \cdot \Delta\theta_j - \frac{1}{2} r_{i-1}^2 \cdot \Delta\theta_j = \frac{1}{2} \left\{ (r_{i-1} + \Delta r_i)^2 - r_{i-1}^2 \right\} \Delta\theta_j,$$

ahol $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$. A zárójelek felbontásával a terület kiszámítása egyszerűsödik:

$$A(R_{ij}) = r_{i-1} \Delta r_i \Delta\theta_j + \frac{1}{2} (\Delta r_i)^2 \Delta\theta_j.$$

Tehát a közelítő Riemann összeg kiszámítása így folytatható:

$$\begin{aligned} V_{nm} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f_{ij}\left(r_{i-1}\Delta r_i \Delta\theta_j + \frac{1}{2}(\Delta r_i)^2\Delta\theta_j\right) = \\ &= \sum_i\sum_j f_{ij} r_{i-1}\cdot \Delta r_i \Delta\theta_j + \frac{1}{2}\sum_j \Delta\theta_j \left(\sum_i f_{ij}(\Delta r_i)^2\right) = V_{nm}^{(1)} + V_{nm}^{(2)}. \end{aligned}$$

A Riemann összeg első tagja a $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta))\cdot r$ függvény integrál-közelítő összege:

$$V_{nm}^{(1)} = \sum_i\sum_j g_{ij}\Delta r_i \Delta\theta_j \quad \longrightarrow \quad \int_a^b \int_\alpha^\beta g(r,\theta) d\theta\, dr.$$

A Riemann összeg második tagja 0 hoz tart $n\to\infty$ esetben. Ezt könnyen igazolhatjuk. Valóban,

$$K = \sup\{|f(x,y)| \ : \ (x,y)\in R\}$$

jelöléssel minden j-re megbecsülhetjük a belső szummát:

$$V_{nm}^{(2)} = \left|\sum_{i=1}^{n} f_{ij}(\Delta r_i)^2\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f_{ij}|\,(\Delta r_i)^2 \le K \max_i \Delta r_i \sum_{i=1}^{n}\Delta r_i = K\max_i \Delta r_i \cdot (b-a),$$

ez pedig 0-hoz tart $\max\limits_i \Delta r_i \to 0$ miatt.

Összefoglalva; azt kaptuk ebben az esetben, hogy:

$$\iint\limits_R f(x,y)d(x,y) = \int_a^b\int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ d\theta dr.$$

A fenti gondolatmenet nem csak polár-téglalap tartományokra alkalmazható. Általában is igaz az alábbi tétel:

2.2.2.A. Tétel. *Legyen $R\subset\mathbb{R}^2$ egy mérhető tartomány, $f: R\to\mathbb{R}$ integrálható függvény. Az R tartomány polárkoordinátákban felírva legyen R':*

$$R' = \{(r,\theta) : (r\cos\theta, r\sin\theta)\in R\}.$$

Ekkor az integrál helyettesítés így végezhető el:

$$\iint\limits_R f(x,y)d(x,y) = \iint\limits_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\ d(r,\theta).$$