Parciális differenciálegyenletek

2009. május 25.

A félév lezárásaként néhány alap-definíciót és alap-példát szeretnék adni a Parciális Differenciálegynletek (PDE) témaköréből. Épp csak egy kis izelítőt. Az alapfeladatok leírása az Analízis II. jegyzetben is megtalálható, itt kicsit átdolgoztam azokat.

1. Bevezetés

Parciális differenciálegyenlet (PDE) olyan differenciálegyenlet, ahol az ismeretlen függvény többváltozós, és az egyenletben az ismeretlen függvény parciális deriváltjai szerepelnek.

Azt a legegyszerűbb esetet tekintjük, amikor az ismeretlen függvény kétváltozós, melyet $u = u(x,t)$ vagy $u = u(x,y)$ jelöli. A jelölés attól függ majd, hogy milyen fizikai jelenséget ír le az egyenlet.

Az $u(x,t)$ jelölés időben változó folyamatot jelent, x a hely koordinátája, t pedig az idő. Az $u(x,y)$ jelölést akkor használjuk, ha egy időben stacionárius síkbeli állapotról van szó. Itt (x,y) a síkbeli koordinátákat jelöli.

Néhény konkrét első és másodrendű PDE-t tekintünk, melyben kétváltozós, kétszer folytonosan deriválható $u(x,t)$ függvényt keresünk. Az $L[u]$ parciális differenciál operátor valamilyen függvénye az

$$u, \qquad u'_x,\ u'_t, \qquad u''_{xx},\ u''_{xt},\ u''_{tt}$$

parciális deriváltaknak. A PDE lineáris, ha $L[u]$ a felsorolt változóknak lineáris függvénye.

1. Példa.

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}$$

elsőrendű parciális differenciáloperátor:

$$L_1[u] = u'_t + bu'_x \qquad b \in \mathbb{R}$$

2. Példa.

$$L_2 = \frac{\partial}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

másodrendű parciális differenciáloperátor

$$L_2[u] = u'_t - c^2 u''_{xx} \qquad c \in \mathbb{R}$$

Az $L[u] = 0$ egyenlet *homogén*, az $L[u] = f$ egyenlet *inhomogén*, ahol f adott kétvaltozós függvény.

2. Elsőrendű lineáris PDE

Tekíntsük az alábbi elsőrendű kezdetiérték feladatot:

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) + b u'_x(x,t) &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad (1) \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad (2) \end{aligned}$$

ahol a g függvény írja le a fizikai folyamat $t = 0$ időpontbeli helyzetét. Ez az ú.n. *transport egyenlet.* Itt az $u(x,t)$ függvńy x koordinátája a *hely*/et jelenti, a t koordináta az *idő*t.

Tegyük fel, hogy valamely $u(x,t)$ függvény megoldása a (1) egyenletnek. Legyen (x,t) egy rögzített pont és definiáljuk az alábbi valós függvényt:

$$z(s) = u(x + sb, t + s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Ennek deriváltja

$$z'(s) = u'_x(x + sb, t + s) \cdot b + u'_t(x + sb, t + s).$$

Mivel u megoldása a parciális differenciálegyenletnek, ezért

$$z'(s) = 0,$$

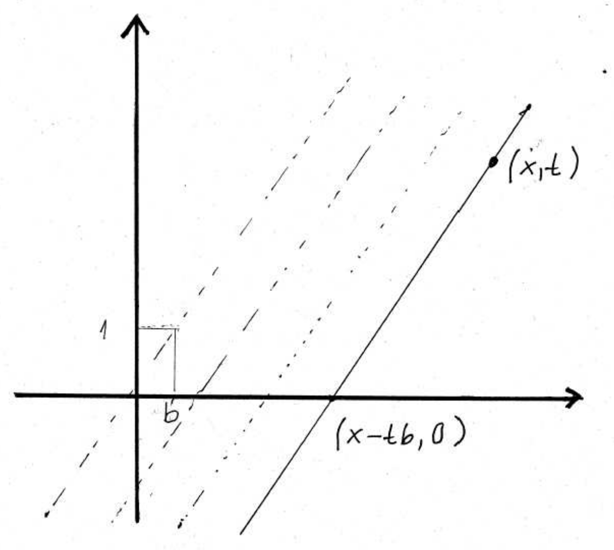
ami azt jelenti, hogy a $z(s)$ függvény konstans. Ezért az u függvény az

$$(x + sb, t + s) \in \mathbb{R}^2, \qquad s \in \mathbb{R}$$

módon paraméterezett egyenes mentén konstans értéket vesz fel:

$$u(x + sb, t + s) = u(x,t), \qquad \forall s \in \mathbb{R}$$

Az ilyen típusú egyeneseket *karakterisztikus egyenes*nek hívjuk.



A fenti (1) egyenlethez tartozik egy *kezdeti feltétel* is, melyet a (2) egyenlet ad meg. Ha a keresett függvény értékét egy adott (x,t) pontban ki akarjuk számolni, akkor azt kell meghatározni, hogy a ponton áthaladó karakterisztikus egyenes hol metszi a $t = 0$ tengelyt. Ez $s = -t$ paraméterértéknél áll elő, így:

$$u(x,t) = u((x + sb, t + s) = u(x - tb, 0) = g(x - tb).$$

Összefoglalva: a (1)-(2) kezdetiérték feladat megoldása:

$$u(x,t) = g(x - tb).$$

Megjegyzés. Ha a kezdeti időponthoz tartozó függvény nem differenciĺható - esetleg szakadása is van - akkor a fent definiált $u(x,t) = g(x - tb)$ függvényt a (1)-(2) egyenletek **gyenge megoldás**ának nevezzük, Az így kapott $u(x,t)$ nem lesz differenciálható - mégis, bizonyos értelemben megoldása a transport egyenletnek. Erről később fognak tanulni.

3. A hővezetés egyenlete

Tekintsünk egy végtelen hosszúnak feltételezett rudat, melynek vastagsága elhanyagolható. Ennek hőmérsékletét vizsgáljuk az idő változásával. Feltételezésünk szerint a rúd szigetelve van a környezetéhez képest. Jelölje $u(x,t)$ a t időpontban az x helyen a hőmérsékletet. Fizikai meggondolások alapján belátható, hogy (megfelelő skálázással) ez a függvény kielégíti ezt a parciális differenciálegyenletet:

$$u'_t - u''_{xx} = 0. \tag{3}$$

Ahhoz, hogy a hőmérsékletet egyértelműen meg tudjuk határozni, szükség van a 0 időpontbeli hőmérséklet ismeretére. A fenti PDE-hez az alábbi *peremfeltételt* adjuk meg:

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

ahol f adott függvény, melyre

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx < \infty.$$

Ezt a (4)feltételt azért hívjuk peremfeltételnek, mert az u függvény értelmezési tartományának:

$$D_u = \{(x,t) \ : \ x \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$$

határán adja meg a függvényértékeket.

Az (3) egyenlet általános megoldásának megkonstruálásához induljunk ki egy könnyen adódó megoldásból. Ezt a megoldást úgy kaphatjuk, hogy $u(x,t)$-t szeparált alakban keressük

$$u(x,t) = G(x)F(t).$$

Ekkor

$$\begin{aligned} u'_t(x,t) &= G(x)F'(t) \\ u''_{xx}(x,t) &= G''(x)F(t), \end{aligned}$$

így a (3) egyenletet átrendezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{G''(x)}{G(x)} = \lambda.$$

Ugyanis a fenti egyenletben az első kifejezés t függvénye, a másik pedig x függvénye - ezért egyenlőség esetén mindkettő konstans. Fizikai meggondolások alapján a jobboldalon szereplő konstans csak negatív lehet (...miért?), $\lambda = -s^2$ alakban írjuk. Így két közönséges DE-t kell megoldanunk:

$$F'(t) = -s^2 F(t), \qquad G''(x) = -s^2 G(x),$$

ahol $s \in \mathbb{R}$ tetszőlegesen megválasztható paraméter. Ezek egy alapmegoldása:

$$F(t) = e^{-s^2 t}, \qquad G(x) = e^{isx}.$$

Az (3) egyenlet s paraméterhez tartozó alapmegoldása

$$u_s(x,t) = e^{-s^2 t + itx},$$

melynek értéke a peremen:

$$u_s(x,0) = e^{ixs}.$$

Ezekből fogjuk 'kikeverni' az általános megoldást.

A módszer, amit alkalmazni fogunk, a *Fourier módszer.* Ha f egy négyzetesen integrálható valós függvény, akkor előállítható

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \widehat{f}(s) ds$$

alakban, ahol $\widehat{f}$ a függvény Fourier transzformáltja.

3.1. Allítás. *A (3)-(4) peremérték feladat megoldása*

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs-s^2 t} \widehat{f}(s) ds. \tag{5}$$

Bizonyítás: A (5) egyenletben definiált függvény teljesíti a peremfeltételt, hiszen $t = 0$-ra

$$u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixs} \widehat{f}(s) ds = f(x).$$

A függvény kielégíti a PDE-t is, hiszen az integráljel mögé deriválva minden s mellett kielégíti azt.

Határozzuk meg a megoldást a kezdeti időpontban ismert f függvényében. $\widehat{f}$ függvény f Fourier transzformáltja, tehát:

$$\widehat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iys} f(y) dy$$

Ezt behelyettesítve a (5) kifejezésbe azt kapjuk, hogy:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t,y) f(y) dy,$$

ahol $K(t,x,y)$ alkalmas magfüggvény:

$$K(t,x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{is(x-y)-s^2 t} ds.$$

Leellenőrizhető, hogy

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy. \tag{6}$$

Megjegyzés. Speciális esetként legyen a hővezető rúd kezdeti eloszlása a Dirac delta függvény, $\delta(x)$. Ezt úgy képzelhetjük el, hogy a rúd a $t = 0$ időpontban az $x = 0$ pontban egységnyi hőmennyiséget kap, ez a kezdeti feltétel. A PDE azt írja le, hogy ilyen impulzust adva hogy fog időben szétoszlani a hő. Ekkor a (6) képlet alapján

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

ami egy normális eloszlás sűrűségfüggvénye (erről majd jövőre tanulnak).

4. A hullámmozgás egyenlete

Tekintsünk egy végtelen hosszú rugalmas húrt, és legyen $u(x,t)$ a t időpontban a húr x pontjának kitérése. Ha a húr hullámmozgást végez, akkor fizikai meggondolások alapján $u(x,t)$ olyan kétszer folytonosan differenciálható függvény, mely kielégíti az alábbi PDE-t:

$$u''_{tt} - c^2 u''_{xx} = 0, \tag{7}$$

ahol c adott konstans. A feladat akkor lesz egyértelműen megoldható, ha megadjuk a kezdeti időpontban a húr helyzetét és az egyes pontokhoz tartozó pillanatnyi sebességet. A peremfeltételek tehát

$$u(x,0) = f(x), \qquad u'_t(x,0) = g(x), \tag{8}$$

ahol f és g adott folytonosan differenciálható függvények.

Példa Legyen $u(x,t) = F(x+ct)$, ahol F tetszőleges kétszer differenciálható függvény. Ekkor

$$u''_{xx} = F'', \qquad u''_{tt} = c^2 F'',$$

tehát u megoldása a hullámegyenletnek.

Hasonlóan, ha $u(x,t) = G(x-ct)$ alakú, ahol G tetszőleges kétszer differenciálható függvény, akkor ez is a hullámegyenlet megoldása lesz.

Egyszerű számolással igzolható, hogy a hullámmozgás PDE általános megoldása

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

ahol F és G kétszer folytonosan differenciálható valós függvények.

4.1. Allítás. *A (7)- (8) feladat D'Alembert-féle megoldása:*

$$u(x,t) = \frac{f(x+ct) - f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds. \tag{9}$$

Bizonyítás. Behelyettesítéssel igazolható.

1. Megjegyzés. Tegyük fel, hogy a kezdeti feltételben szereplő függvények véges intervallumon kívül 0 értékűek - azaz csak azon a szakaszon van bármiféle mozgás. A fenti formulából látszik, hogy minden x pontba ELJUT a húr rezgése elegendően nagy t esetén.

2. Megjegyzés. Az $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$ függvény **gyenge** megoldása a hullámegyenletnek, ha F és/vagy G nem kétszer differenciálható. Ennek a gyenge megoldásnak egy sajátossga, hogy az eredeti függvényekben jelen levő szingularitások nem tűnnek el az idővel. Ha például F egy x_0 pontban szakad, akkor u szakadási helyei: $\{(x,t) \;:\; x - ct = x_0\}$ - a szingularitás terjed tovább idővel.

5. Laplace egyenlet

A PDE elmélet legfontosabb egyenlete a Laplace egyenlet. A kétdimenziós Laplace operátor

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

Kétszer folytonosan differenciálható u függvényre

$$\triangle u = u''_{xx} + u''_{yy}.$$

A Laplace egyenlet:

$$\triangle u = 0 \tag{10}$$

A Laplace egynlethez többféle peremfeltételt lehet hozzárendelni.

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ nyílt tartomány, melynek határa ∂D.

Dirichlet feladat:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0, \qquad (x,y) \in D \\ u(x,y) &= g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial D \end{aligned}$$

ahol g elegendően sima adott függvény.

Neumann feladat:

$$\begin{aligned} \triangle u(x,y) &= 0, \qquad (x,y) \in D \\ \partial_n u(x,y) &= g(x,y), \qquad (x,y) \in \partial D \end{aligned}$$

ahol $\partial_n u$ a határra merőleges iránymenti derivált, g elegendően sima adott függvény.

5.1. Definíció. *Ha egy u függvény valamely $D \subset \mathbb{R}^2$ tartományban kielégíti a Laplace egyenletet, akkor ott* **harmonikus**.

Komplex függvénytanban tanultuk, hogy egy differenciálható komplex függvény kanonikus alakjában szereplő két kétváltozós valós függvény harmonikus.

6. Másodrendű lineáris PDE-k osztályozása

Az $L[u]$ másodrendű parciális differenciáloperátor *főrésze* a másodrendű tagokat tartalmazza:

$$L_0[u] = au''_{xx} + bu''_{xt} + cu''_{tt}.$$

A PDE *kanonikus alakú*, ha $b = 0$. Belátható, hogy állandó együtthatós lineáris másodrendű PDE alkalmas koordináta transzformációval kanonikus alakra hozható, melyben az operátor főrésze

$$L_0[u] = \varepsilon_1 u''_{xx} + \varepsilon_2 u''_{tt}, \qquad \varepsilon_{1,2} = 0, \pm 1.$$

A másodrendű lineáris PDE-k osztályozása ez alapján történhet.

1. A PDE *parabolikus* típusú, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$, azaz

   $$\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 \neq 0 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 \neq 0,\ \varepsilon_2 = 0.$$

   Példa erre a hővezetés egyenlete.

2. A PDE *hiperbolikus* típusú, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = -1$, azaz

   $$\varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = -1 \qquad \text{vagy} \qquad \varepsilon_1 = -1,\ \varepsilon_2 = 1.$$

   Hiperbolikus egyenlet például a hullámmozgás egyenlete.

3. A PDE *elliptikus*, ha $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 1$, azaz

   $$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1 \quad \text{vagy} \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1.$$

   Ebben az esetben a függvény változóit x és y jelöli, ezzel időben nem változó folyamatokat lehet leírni. Erre példa a Laplace egyenlet. Az inhomogén elliptikus egyenletet *Poisson egyenlet*-nek hívjuk:

   $$\triangle u + f(x, y) = 0.$$