

Pinchover-Rubinstein Exercise 3.5 (p.74)

Horváth Domonkos, Tuza Zoltán

...

1. Feladat

Keresse meg azt a tartományt, ahol az egyenlet elliptikus illetve, ahol hiperbolikus. Mindkét tartomány esetén hozza kanonikus formára az egyenletet.

$$xu''_{xx} - yu''_{yy} + \frac{1}{2}(u'_x - u'_y) = 0 \quad (1)$$

2. Tartományok megállapítása

Először megvizsgáljuk differenciáloperátor főrészt (differenciáloperátor def. lásd p65. (3.2) egyenlet.), az alábbiakat tekinthetjük, úgymint egy kvadratikus alakot. Ebben ez esetben az együtthatókból képzett mátrix definitisége fogja megadni a parciális differenciálegyenlet osztályát.

$$L_0[u] = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$L_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ezekből következően,
Hiperbolikus, ha $b^2 - ac > 0$,
Elliptikus, ha $b^2 - ac < 0$

Behelyettesítve a példában megadott adatokat, megkapjuk a hiperbolikus illetve az elliptikus tartományokat.

$$a = x, b = 0, c = -y$$
$$xy > 0 \iff (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)$$
$$xy < 0 \iff (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge y > 0)$$

3. Hiperbolikus egyenlet kanonikus alapra hozása

A [1]3.5 Theoremnek megfelelően a transzformált együtthatómátrix főátlójában csak 0 elemek lehetnek, ebből kiindulva levezethetőek a [1]3.3 illetve [1]3.4 egyen-

letek:

$$\begin{aligned} 0 &= a\xi'_x + (b - \sqrt{b^2 - ac})\xi'_y \\ 0 &= a\xi'_x + (b + \sqrt{b^2 - ac})\xi'_y \end{aligned} \quad (3)$$

Az egyenletekbe behelyettesítve a feladatban megadott a és c értékét:

$$\begin{aligned} 0 &= x\xi'_x - \sqrt{xy}\xi'_y \\ 0 &= x\xi'_x + \sqrt{xy}\xi'_y \end{aligned} \quad (4)$$

Ezt a típusú szeprábilis egyenletet már láttuk korábban, emlékeztetőül

$$\begin{aligned} f(x, t)u'_x + g(x, t)u'_y &= 0 \quad f, g \in C(\Omega) \\ t'(x, t) &= \frac{g(x, t)}{f(x, t)} \end{aligned} \quad (5)$$

Behelyettesítve a megfelelő értékeket, megkapjuk a karakterisztikus egyenleteket. Az egyenletek megoldási adják meg azokat görbék, ahol teljesül, hogy az együttthatómátrix főátlója 0 lesz.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{-\sqrt{xy}}{x} \\ y'(x) &= \frac{\sqrt{xy}}{x} \end{aligned} \quad (6)$$

Megkapjuk a karakterisztikus görbéket, ezek mentén a megoldás konstans.

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{y} - \sqrt{x} \\ c_2 &= \sqrt{y} + \sqrt{x} \end{aligned}$$

A kanonikus alakra hozáshoz a következő koordináta-transzformáció szükséges:

$$u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y)) = w(\sqrt{y} - \sqrt{x}, \sqrt{y} + \sqrt{x}) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} u'_x &= -w'_\xi \frac{1}{2\sqrt{x}} + w'_\eta \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}(w'_\eta - w'_\xi) \\ u'_y &= w'_\xi \frac{1}{2\sqrt{y}} + w'_\eta \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}(w'_\eta + w'_\xi) \\ u''_{xx} &= \frac{1}{4x} \left(w''_{\xi\xi} + w''_{\eta\eta} \right) + \frac{1}{4\sqrt{x^3}} \left(w'_\xi - w'_\eta \right) \\ u''_{yy} &= \frac{1}{4y} \left(w''_{\xi\xi} + 2w''_{\xi\eta} + w''_{\eta\eta} \right) + \frac{1}{4\sqrt{y^3}} \left(w'_\xi + w'_\eta \right) \end{aligned}$$

A fentieket a feladatban kiírt egyenletbe behelyettesítve, és a kijelölt műveleteket elvégezve kapjuk a hiperbolikus egyenlet kanonikus alakját

$$-\frac{1}{2}w''_{\xi\eta} = 0 \quad (8)$$

Ez az egyenlet összhangban áll a 3.5 Theorem-ben megfogalmazott kanonikus alakkal.

4. Elliptikus egyenlet kanonikus alakra hozása

Elliptikus egyenlet esetén a transzformált együtthatómátrix főátlóbeli elemeinek egyenlőeknek kell lenniük, de nem nullának! Ebből felírható a [1](3.15) egyenlet, ahol definiáljuk a $\Phi = \xi(x, y) + \imath\eta(x, y)$ függvényt. A koordináta-transzformációs függvények így a következők lesznek:

$$\begin{aligned}\xi &= \Re(\Phi) \\ \eta &= \Im(\Phi)\end{aligned}$$

A hiperbolikus esethez hasonlóan felírhatjuk a szeparábilis differenciálegyenleteket

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \pm \imath \sqrt{\frac{-y}{x}} \\ -\sqrt{y} + \imath \sqrt{x} &= c\end{aligned}\tag{9}$$

Kapjuk a komplex "karakterisztikus görbékét"

$$\begin{aligned}\xi(x, y) &= \sqrt{-y} \\ \eta(x, y) &= \sqrt{x}\end{aligned}$$

Ebből felírható a koordináta-transzformáció, hasonló lépésekkel, mint a hiperbolikus esetben.

$$u(x, y) = w(\sqrt{-y}, \sqrt{x})\tag{10}$$

$$\begin{aligned}u'_x &= w'_\eta \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ u'_y &= w'_\xi \left(-\frac{1}{2\sqrt{-y}} \right) \\ u''_{xx} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} w''_{\eta\eta} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) + w'_\eta \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right) \\ u''_{yy} &= -\frac{1}{2\sqrt{-y}} w''_{\xi\xi} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-y}} \right) + w'_\xi \left(-\frac{1}{4\sqrt{-y^3}} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} (w''_{\eta\eta} - w''_{\xi\xi}) = 0\tag{11}$$

A fenti egyenlet összhangban áll a 3.12 Theorem-ben megfogalmazott kanonikus alakkal.