

Pinchover-Rubinstein Example 2.7 (p.34)

Tuza Zoltán

...

1. Feladat

Keressük a következő egyenlet megoldását:

$$u'_x + 3y^{2/3}u'_y = 2 \quad (1)$$

Kezdeti feltétel

$$u(x, 1) = x + 1$$

2. Megoldás menete

$$\begin{array}{ll} a = 1 & x'_t = 1 \\ b = 3y^{2/3} & y'_t = 3y^{2/3} \\ c = 2 & u'_t = 2 \end{array} \quad (2)$$

Az egyértelmű megoldáshoz teljesülnie kell annak, hogy a Jacobi mátrix determinánsa nem nulla. (un. "transversality condition", lásd 2.5 fejezet p36.) Mivel a mátrixban a b elem helyén egy függvény található, ezért a determináns meghatározásához a függvényt ki kell értékelni a kezdeti feltétel által meghatározott helyen. $y = 1 \quad 3 * 1^{2/3} = 3$

$$J = \begin{vmatrix} a & b \\ \frac{\partial x_0}{\partial s} & \frac{\partial y_0}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (3)$$

Tehát a feladatnak létezik egyértelmű megoldása.

Felírjuk a karakterisztikus egyenletrendszert.

$$\begin{array}{ll} x'_t = 1 & x(0, s) = s \\ y'_t = 3y^{2/3} & y(0, s) = 1 \\ u'_t = 2 & u(0, s) = s + 1 \end{array} \quad (4)$$

Az egyenletrendszer megoldásai, amelyek leírják a parametrizált integrálfelületet.
 $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$

$$\begin{aligned} x(t, s) &= t + c|_{t=0} \rightarrow c = s \rightarrow x(t, s) = t + s \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= 3y^{2/3} \rightarrow \int \frac{1}{y^{2/3}} dy = \int 1 dt \rightarrow y^{1/3} = t + c \rightarrow y(t, s) = (x + 1)^3 \\ u(t, s) &= 2t + c|_{t=0} \rightarrow c = s + 1 \rightarrow u(t, s) = 2t + s + 1 \end{aligned} \quad (5)$$

Az egyenletrendszer első két egyenletéből kifejezzük t és s változókat. Ahhoz, hogy az eredeti $u(x, y)$ egyenlet megoldását megkapjuk, a rendszert invertálnunk kell.

$$\begin{aligned} t &= x - s \\ y &= (t + 1)^3 \rightarrow y = (x - s + 1)^3 \rightarrow s = x - y^{1/3} + 1 \\ t &= y^{1/3} - 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Ezt behelyettesítve a $u(t, s)$ -be megadható $u(x, y)$ megoldás

$$u(x, y) = x + y^{1/3} \quad (7)$$