

Pinchover-Rubinstein Exercise 4.9 (p.95)

{Szolek, Tóth} András

1. Feladat

Tekintsük a következő egyenletet

$$u''_{tt} - u''_{xx} = 1$$

Az alábbi kezdeti értékek mellett

$$u(x, 0) = f(x) = x^2$$

$$u'_t(x, 0) = g(x) = 1$$

2. Megoldás

A megoldás a homogén és inhomogén megoldások összegeként áll elő. Először az inhomogén megoldást keressük, majd annak kezdeti feltételekhez való hozzájárulását a homogén megoldásban kompenzáljuk. Az inhomogén megoldás az egyenlet inhomogén tagjának a Region of Dependence-háromszögön vett integráljaként adódik.

1.

$$v(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau$$

Jelen esetben, mivel $c = 1$ és $F(x, t) \equiv 1$ az inhomogén megoldás

$$v(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} 1 d\xi d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t 2t - 2\tau d\tau = \left[t\tau - \frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}$$

amely a kezdeti feltételek helyén

$$v(x, 0) = \frac{t^2}{2} \Big|_{t=0} = 0$$

$$v'_t(x, 0) = t|_{t=0} = 0$$

(tehát a homogén megoldás kezdeti feltételein nem is kell változtatnunk!)

megj.: $t^2/2$ intuitív módon is megkapható, t szerinti második deriváltja éppen 1.

2. A homogén egyenlet megoldása

$$w''_{tt} - w''_{xx} = 0$$

A "módosított" kezdeti feltételek:

$$w(x, 0) = f(x) - v(x, 0) = f(x) = x^2$$

$$w'_t(x, 0) = g(x) - v'_t(x, 0) = g(x) = 1$$

A D'Alembert formula alapján

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{f(x+ct) + f(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \\ &= \frac{(x+t)^2 + (x-t)^2}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} 1 ds = x^2 + t^2 + t \end{aligned}$$

3. Az eredeti egyenlet megoldása tehát

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = x^2 + \frac{3}{2}t^2 + t$$