Pinchover-Rubinstein Exercise 3.3 (p.73)

{Szolek, Tóth} András

1. Feladat

Adott az alábbi egyenlet:

$$u''_{xx} + 4u''_{xy} + u'_x = 0$$

a. Határozzuk meg az egyenlet típusát és hozzuk kanonikus alakra!

b. Határozzuk meg $u(x, y)$ általános megoldását!

c. Határozzuk meg $u(x, y)$-t az alábbi kezdeti értékek mellett:

$$u(x, 8x) = 0 \qquad u'_x(x, 8x) = 4e^{-2x}$$

2. Megoldás

a. $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, tehát $b^2 - ac = 4 > 0$, az egyenlet hiperbolikus.

Koordináta transzformáció: $(x, y) \to (\xi, \eta)$ ahol $\xi = \xi(x, y),\ \eta = \eta(x, y)$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{pmatrix}$$

A transzformáció alkalmazása hiperbolikus esetben

$$JAJ^T = A' = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

Az ebből következő egyenletek:

$$0 = a\xi'^2_x + 2b\xi'_x\xi'_y + c\xi'^2_y = \xi'^2_x + 4\xi'_x\xi'_y = \xi'_x(\xi'_x + 4\xi'_y)$$

$$0 = a\eta'^2_x + 2b\eta'_x\eta'_y + c\eta'^2_y = \eta'^2_x + 4\eta'_x\eta'_y = \eta'_x(\eta'_x + 4\eta'_y)$$

Független, invertálható rendszerhez jutunk, ha a fenti egyenleteket

$$\xi'_x + 4\xi'_y = 0 \qquad \eta'_x = 0$$

választással elégítjük ki. Triviálisan,

$$\xi(x, y) = f(y - 4x) \qquad \eta(x, y) = g(y)$$

így mivel lineáris transzformációt keresünk, jó választás

$$\xi(x,y) = y - 4x \qquad \eta(x,y) = y$$

amivel

$$u(x,y) = w(\xi(x,y), \eta(x,y)) = w(y-4x, y)$$

Az eredeti egyenlet átírásához szükségünk van u'_x, u''_{xx} valamint u''_{xy} $w(\xi,\eta)$-vel kifejezett alakjára.

$$\begin{aligned} u'_x &= -4w'_\xi(y-4x,y) \\ u''_{xx} &= 16w''_{\xi\xi} \\ u''_{xy} &= -4w''_{\xi\xi} - 4w''_{\xi\eta} \end{aligned}$$

Ebből

$$u''_{xx} + 4u''_{xy} + u'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad -16w''_{\xi\eta} - 4w'_\xi = 0$$

A PDE kanonikus alakja tehát

$$w''_{\xi\eta} + \frac{1}{4}w'_\xi = 0$$

b. Ennek megoldása $W(\xi,\eta) = w'_\xi(\xi,\eta)$ helyettesítésével

$$\frac{\partial}{\partial\eta}W = -\frac{1}{4}W$$

$$W(\xi,\eta) = e^{-\eta/4}f_1(\xi) = w'_\xi$$

Tehát

$$w(\xi,\eta) = e^{-\eta/4}f(\xi) + g(\eta)$$

A koordinátatranszformációkat behelyettesítve $u(x,y) = w(y-4x,y)$ alapján

$$u(x,y) = e^{-y/4}f(y-4x) + g(y)$$

c. Keressük meg f-et és g-t, hogy

$$u(x,8x) = 0 \qquad u'_x(x,8x) = 4e^{-2x}$$

$u'_x(x,8x) = 4e^{-2x}$ kielégítése:

$$u'_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[e^{-y/4}f(y-4x) + g(y)\right] = -4e^{-y/4}f'(y-4x)$$

$$u'_x(x,8x) = -4e^{-y/4}f'(y-4x)\Big|_{y=8x} = -4e^{-2x}f'(4x) = 4e^{-2x}$$

$$f'(4x) = -1 \quad \Rightarrow \quad f(t) = -t$$

Ezzel $u(x,8x) = 0$ feltétel

$$u(x,8x) = -4e^{-y/4}(4x-y) + g(y)\Big|_{y=8x} = e^{-2x}(-4x) + g(8x) = 0$$

$$g(8x) = 4xe^{-2x} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \frac{t}{2}e^{-t/4}$$

Tehát a megoldás:

$$u(x,y) = e^{-y/4}f(y-4x) + g(y) = e^{-y/4}(4x-y) + \frac{y}{2}e^{-y/4}$$