Láncszabály többváltozós függvényekre

Kiegészítés az Analizis II. előadáshoz

2010. március 10.

Ismétlés: Láncszabály valós függvényekre:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

f a külső, g a belső függvény. Mindkettő egy változós, valós értékű.

1. speciális eset

A *külső* függvény egy változós, legyen ez $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. A *belső* függvény két változós, legyen ez $\Phi : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$. Feltesszük, hogy $R_\Phi \subset D$. Ekkor az összetett függvény értelmezhető:

$$F = f \circ \Phi : S \to \mathbb{R}, \qquad F(x,y) = f(\Phi(x,y)).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy Φ differenciálható az $(x,y)\epsilon\ \mathrm{int}S$ pontban, és f differenciálható az $u = \Phi(x,y)$ pontban. Ekkor az összetett függvény is differenciálható, és a parciális deriváltak:

$$F'_x(x,y) = f'(\Phi(x,y))\Phi'_x(x,y),$$
$$F'_y(x,y) = f'(\Phi(x,y))\Phi'_y(x,y).$$

Bizonyítás:

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = f(\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y)) - f(\Phi(x,y)) = (*)$$

f differenciálhatósaága miatt

$$f(u+\Delta u) - f(u) = f'(u)\ \Delta u + \varepsilon(\Delta u),$$

ahol $\varepsilon(\Delta u)$ kisordó. Emiatt a fenti egyenletet folytathatjuk:

$$\begin{aligned}(*) &= f'(\Phi(x,y))\big(\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y) - \Phi(x,y)\big) + \varepsilon = \\ &= f'(\Phi(x,y)) \cdot \big(\Phi'_x(x,y)\Delta x + \Phi'_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\big) + \varepsilon.\end{aligned}$$

A fenti egyenletben Φ differenciálhatóságát használtuk fel, ε_1 szintén kisordó függvény.

Tehát azt kaptuk, hogy

$$F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = \big(f'(\Phi(x,y))\Phi'_x(x,y)\big)\Delta x + \big(f'(\Phi(x,y))\Phi'_y(x,y)\big)\Delta y + \varepsilon_2.$$

Ez épp azt jelenti, hogy F differenciálható. Továbbá a jobboldalon Δx szorzója $F'_x(x,y)$ és Δy szorzója $F'_y(x,y)$.

Példa. Legyen $F(x,y) = (f(x,y))^2$, ahol a belső függvény differenciálható. Ekkor

$$F'_x(x,y) = 2f(x,y)\ f'_x(x,y), \qquad F'_y(x,y) = 2f(x,y)\ f'_y(x,y).$$

2. speciális eset

A *külső* függvény két változós, legyen ez $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^2$. *Két belső* függvény van, mindkettő egy változós, legyenek ezek $\varphi, \psi : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy $R_\varphi \times R_\psi \subset S$. Ekkor az összetett függvény értelmezhető:

$$F : D \to \mathbb{R}, \qquad F(t) = f(\varphi(t), \psi(t)).$$

Tétel. Tegyük fel, hogy φ és ψ differenciálhatóak a $t\epsilon$ int$D$ pontban, és f differenciálható az $(x,y) = (\varphi(t), \psi(t))$ pontban. Ekkor az összetett függvény is differenciálható, és deriváltja:

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + f'_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)$$

Megjegyzés. A könnyebb átláthatóság kedvéért a fenti formula argumentumok nélkül:

$$\big(f \circ (\varphi, \psi)\big)' = f'_x\varphi' + f'_y\psi'$$

Bizonyítás. Előadáson elmondtam. Aki nem jegyzetelte le, bizonyítsa be - nem nehéz HF.

Példa. Kétváltozós f függvény α irány menti deriváltját számoljuk az (x,y) pontban. Ehhez az $f(x,y)$ függvénybe behelyettesítjük a

$$\varphi(t) = x + t\cos\alpha, \qquad \psi(t) = y + t\sin\alpha$$

változókat, és a deriváltat nézzük a $t = 0$ helyen. A fenti tétel alapján:

$$F(t) = f(x + t\cos\alpha, y + t\sin\alpha)$$

deriváltja

$$F'(0) = f'_x(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\varphi'(0) + f'_y(x + 0\cos\alpha, y + 0\sin\alpha)\psi'(0) =$$

$$= f'_x(x,y)\cos\alpha + f'_y(x,y)\sin\alpha.$$

Ez a jól ismert formulát adja.