Fourier analízis II.

Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

2017. május 12.

3.5. Konvolúció

Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy mindkettő abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty.$$

3.1. Definíció. *Az f és g függvények konvolúciója $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, melyet így értelmezünk:*

$$\big(f * g\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

3.1. Állítás. *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1. *$f * g$ jól értelmezett, azaz az improprius integrál létezik és véges:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Továbbá $f * g$ is abszolút integrálható, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\big(f * g\big)\ (x)\right|\ dx \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx.$$

2. *Kommutatív: $f * g = g * f$.*
3. *Asszociatív: $(f * g) * h = f * (g * h)$.*
4. *Disztributív tulajdonság: $(f + g) * h = f * h + g * h$.*

Ezek közvetlen számolással igazolhatóak (**HF**).

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$\big(f * g\big)\ (x) = \int_0^1 g(x-y)dy,$$

vagy a kommutativitást felhasználva, fordított sorrendben integrálva:

$$\big(g * f\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)dy = \int_{x-1}^{x} g(y)dy.$$

Tehát a konvolúció hatása az lesz, hogy a g függvény x előtti 1 hosszúságú intervallumon felvett értékeit kiátlagolja.

3.6. Konvolúció és Fourier transzformáció

3.2. Allítás. *Szorzat ill. konvolúció Fourier transzformáltja így számolható:*

1. $\mathcal{F}(f * g, s) = \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}(f,s) \cdot \mathcal{F}(g,s)$
2. $\mathcal{F}(f \cdot g, s) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f,s) * \mathcal{F}(g,s).$

Bizonyítás: 1. Felírjuk a FT definícióját, majd behelyettesítjük a konvolúció képletét:

$$\mathcal{F}(f*g,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(x) \cdot e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y)dy \right) \cdot e^{-isx}dx =$$

Felcseréljük az integrálások sorrendjét, és a belső integrálból kihozzuk az x-től független tényezőket:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot e^{-is(x-y)}dx\, dy =$$

A belső integrálban $u = x - y$ helyettesítést végzünk:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu}du\, dy =$$

Két független integrált kapunk, ami szorzatként írható:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu}du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy}dy \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(g,s) \cdot \mathcal{F}(f,s)$$

2. A definíció felírásával kezdjük:

$$\mathcal{F}(f \cdot g, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x) \cdot e^{-isx} dx =,$$

majd az $f(x)$ helyett írjuk be előállítását az inverz Fourier transzformációval. Így folytatható:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(r) e^{irx} dr \cdot g(x) e^{-isx} dx =,$$

ahol az inverz Fourier-transzformációban egy új integrálási változót kell használni. Felcserélve az integrálások sorrendjét folytahatjuk:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(r) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i(s-r)x} dx \right) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(r)\, \widehat{g}(s-r) dr = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}(s).$$

3.7. Dirac delta függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden ε-ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha} \quad 0 < |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor minden ε-ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x) dx = 1.$$

A függvény alatti egységnyi terület egyre kisebb intervallumra koncetrálódik, ahogy ε tart 0-ba. Az $\varepsilon = 0$ határérték olyan egységnyi impulzushoz hasonlítható, ami "egyszer csak" megtörténik. Tetszőleges f folytonos függvény mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x) dx = \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x) dx.$$

Ezért tehát

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x) dx = f(0).$$

Összefoglalva az eddigieket, ha létezne a $\delta(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(x)$, határértékfüggvény, akkor ezekkel a tulajdonságokkal rendelkezne:

1. Függvény alatti terület egységnyi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1.$$

2. Tetszőleges folytonos függvény esetén

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

Ez a *Dirac delta függvény* létezik, bár definíciója kivezet abból a fogalomrendszerből, amellyel eddig foglakoztunk. Nem *közönséges* függvény. Ilyen *általánosított* függvények a disztribúcióelméletben fordulnak elő, de formálisan mi is használni fogjuk (egy kicsit legalábbis).

A Dirac delta függvény konvolúciója tetszőleges f függvénnyel:

$$\big(\delta * f\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(x-y)dy = f(x)$$

Dirac delta a konvolúció művelet egysége.

A Dirac delta függvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}(\delta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs}\delta(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

minden s-re. Fourier transzformáltja tehát konstans.

Alkalmazás

Rádióban *sávszűrés.*

AM, közeéphullámon. A jel Fourier transzformáltja $f(x) \longrightarrow \widehat{f}(s)$.

A FT-t helyett ennek 'csonkítását' veszik:

$$\widehat{f_B}(s) = \begin{cases} \widehat{f}(s) & \text{ha } s \in [-B, B] \\ \\ 0 & \text{ha } |s| > B \end{cases}$$

Ez a csonkítás egy megfelelő függvénnyel való szorzást jelent, nevezetesen:

$$\widehat{f_B}(s) = \widehat{f}(s) \cdot \widehat{g_B}(s),$$

ahol

$$\widehat{g}_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s \in [-B, B] \\ 0 & \text{ha } |s| > B \end{cases}$$

Tehát az inverz Fourier transzformációval megkapjuk az átalakított jelet az időtartományban:

$$f_B(x) = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}_B, x) = \sqrt{2\pi}\big(f * g_B\big)\ (x),$$

ahol

$$g_B(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}_B(y) \cdot e^{ixy} dy = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{ixy} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin{(Bx)}}{x}.$$