Fourier analízis II.

Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

2014. április 29.

3.5. Konvolúció

Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy mindkettő abszolút integrálható:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx < \infty.$$

3.1. Definíció. *A két függvény konvolúciója az $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyet így értelmezünk:*

$$\big(f * g\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

3.1. Állítás. *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1. *$f * g$ jól értelmezett, azaz az improprius integrál létezik és véges:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Továbbá $f * g$ is abszolút integrálható, és

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\big(f * g\big)\ (x)\big|\ dx < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx.$$

2. *Kommutatív: $f * g = g * f$.*
3. *Asszociatív: $(f * g) * h = f * (g * h)$.*
4. *Disztributív tulajdonság: $(f + g) * h = f * h + g * h$.*

Ezek közvetlen számolással igazolhatóak (**HF**).

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \in [0,1] \\ \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ekkor

$$\big(f * g\big)\ (x) = \int_0^1 g(x-y)dy,$$

tehát a konvolúció hatása: a g függvény x előtti értékeit kiátlagolja.

3.6. Konvolúció és Fourier transzformáció

3.2. Állítás. *Konvolúció az időtartományban és a frekvenciatartományban:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s) \\ \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathcal{F}(f \cdot g, s) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Időtartományban. (A frekvenciatartományban teljesen hasonló.)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) \cdot e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot g(x-y) dy \right) \cdot e^{-isx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) \cdot e^{-is(x-y)} dx\, dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu} du\, dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot e^{-isu} du \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cdot e^{-isy} dy \cdot \sqrt{2\pi} = \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \mathcal{F}(g, s) \cdot \mathcal{F}(f, s) \end{aligned}$$

3.7. Dirac-delta függvény

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges, és minden ε-ra definiáljuk az alábbi függvényt:

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{ha} \quad 0 < |x| < \varepsilon, \\ 0, & \text{ha} \quad |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Ekkor minden ε-ra

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x)dx = 1.$$

Kiszámoljuk, mi lesz a $\delta_\varepsilon(x)$ függvények Fourier transzformáltjának határértéke $\varepsilon \to 0$ esetén. Általában, tetszőleges f folytonos függvény mellett:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \frac{\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx}{2\varepsilon} = \frac{f(\xi)\cdot 2\varepsilon}{2\varepsilon} = f(\xi),$$

ahol $\xi \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ létezését az integrál-középérték tétel biztosítja. Ezért tehát

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta_\varepsilon(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\xi) = f(0).$$

Összefoglalva az előzőket, ha létezne a határértékfüggvény, $\delta(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x)$, akkor ez ilyen tulajdonságú lenne:

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1,$$

2. Tetszőleges folytonos, abszolút integrálható függvény esetén
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0).$$

Ez a *Dirac-delta függvény* létezik, bár definíciója kivezet abból a fogalomrendszerből, amellyel eddig foglakoztunk. Ilyen általánosított függvények a disztribúcióelméletben fordulnak elő, de formálisan mi is használni fogjuk (egy kicsit legalábbis).

A Dirac-delta függvény konvolúciója tetszőleges f függvénnyel:

$$\big(\delta * f\big)\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y)f(x-y)dy = f(x)$$

Dirac-delta a konvolúció művelet egysége.

A Dirac-delta függvény Fourier transzformáltja:

$$\mathcal{F}(\delta, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixs} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

minden s-re. Fourier transzformáltja tehát konstans.

Alkalmazás

Rádióban *sávszűrés*.

AM, közeéphullámon. A jel Fourier transzformáltja $f(x) \longrightarrow \widehat{f}(s)$.

A FT-t helyett ennek 'csonkítását' veszik:

$$\widehat{f}_B(s) = \begin{cases} \widehat{f}(s) & \text{ha } s \in [-B, B] \\ \\ 0 & \text{ha } |s| > B \end{cases}$$

Ez a csonkítás egy megfelelő függvénnyel való szorzást jelent, nevezetesen:

$$\widehat{f}_B(s) = \widehat{f}(s) \cdot \widehat{g}_B(s),$$

ahol

$$\widehat{g}_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s \in [-B, B] \\ 0 & \text{ha } |s| > B \end{cases}$$

Tehát az inverz Fourier transzformációval megkapjuk az átalakított jelet az időtartományban:

$$f_B(x) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f} \cdot \widehat{g}_B, x) = \sqrt{2\pi} \big(f * g_B \big) \ (x),$$

ahol

$$g_B(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}_B(y) \cdot e^{ixy} dy = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-B}^{B} e^{ixy} dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin{(Bx)}}{x}.$$