Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

Konvolúció

(Az Analízis II. jegyzet 197. oldalán levő 6.3.1. definíciót kiterjesztjük azokra a függvényekre, melyek az egész számegyenesen értelmezve vannak.)

Adott két valós függvény, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Feltesszük, hogy mindkettő abszolút integrálható.

1. Definíció. *A két függvény* <u>*konvolúciója*</u> $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *melyet így értelmezünk:*

$$f * g\ (x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy$$

1. Állítás. *A konvolúció alaptulajdonságai:*

1. *$f * g$ jól értelmezett, azaz az improprius integrál létezik és véges:*

   $$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy < \infty \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   Továbbá $f * g$ is abszolút integrálható, és

   $$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g\ (x)|\ dx < \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|dx.$$

2. *Kommutatív: $f * g = g * f$.*
3. *Asszociatív: $(f * g) * h = f * (g * h)$.*

Ezek közvetlen számolással igazolhatóak.

Konvolúció és Fourier transzformáció

2. Állítás. *Konvolúció az időtartományban és a frekvenciatartományban:*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f * g, s) &= \sqrt{2\pi}\ \mathcal{F}(f, s) \cdot \mathcal{F}(g, s) \\ \mathcal{F}(f, s) * \mathcal{F}(g, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathcal{F}(f \cdot g, s) \end{aligned}$$

Bizonyítás: Időtartományban. (A frekvenciatartományban teljesen hasonló.)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f*g,s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(f*g)(x)\cdot e^{-isx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot g(x-y)dy)\cdot e^{-isx}dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}\int_{-\infty}^{\infty}g(y-x)\cdot e^{-is(x-y)}dx\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\cdot e^{-isu}du\,dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(u)\cdot e^{-isu}du\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\cdot e^{-isy}dy\cdot\sqrt{2\pi} = \\
&= \sqrt{2\pi}\cdot\mathcal{F}(g,s)\cdot\mathcal{F}(f,s)
\end{aligned}$$

Alkalmazás

Rádióban *sávszűrés.*

AM, közeéphullámon. A jel Fourier transzformáltja

$$f(x) \longrightarrow \widehat{f}(s).$$

A FT-t helyett ennek 'csonkítását' veszik:

$$\widehat{f_B}(s) = \begin{cases} \widehat{f}(s) & \text{ha } s\in[-B,B] \\ 0 & \text{ha } |s|>B \end{cases}$$

Ez a csonkítás egy megfelelő függvénnyel való szorzást jelent, nevezetesen:

$$\widehat{f_B}(s) = \widehat{f}(s)\cdot\widehat{g}_B(s),$$

ahol

$$\widehat{g}_B(s) = \begin{cases} 1 & \text{ha } s\in[-B,B] \\ 0 & \text{ha } |s|>B \end{cases}$$

Tehát az inverz Fourier transzformációval megkapjuk az átalakított jelet az időtartományban:

$$f_B(x) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f_B}\cdot\widehat{g}_B, x) = f*g_B\ (x),$$

ahol

$$g_B(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin Bx}{x}.$$