KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok vizsgára

2019. május 16.

Komplex függvények kanonikus alakja

Írjuk fel az alábbi függvények kanonikus alakját:

1. $f(z) = z^2$
2. $f(z) = (z-1)^2$
3. $f(z) = \dfrac{1}{z}$
4. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$
5. $f(z) = e^{z+1}$
6. $f(z) = e^{-z}$
7. $f(z) = (1+2i)z$
8. $f(z) = \dfrac{1+i}{z}$

Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg, hogy az alábbi f függvények az adott D tartománynak mit feleltetnek meg.

Rajzoljuk le az eredeti D tartományt és ennek $f(D)$ képét is.

9. $f(z) = -2z$, $D = \{z : |z| = 1\}$.
10. $f(z) = \bar{z}$, $D = \{z : \mathrm{Im}\,(z) < 0\}$.

11. $f(z) = (1+i)z, \;\; D = \mathbb{R}$.

12. (*) $f(z) = (1+i)z, \;\; D = \{z : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

13. $f(z) = -iz, \;\; D = \{z : |z| < 1\}$.

14. (*) $f(z) = -iz - 1, \;\; D = \{z : |z| < 1\}$.

15. Határozzuk meg, hogy az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ leképezés a komplex a sík adott tartományainak mit feleltet meg:

    (a) $D_1 = \{z \;:\; 0 < \mathrm{Re}\,(z)\}$.

    (b) $D_2 = \{z \;:\; \mathrm{Re}\,(z) > 1, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

    (c) (*) $D_3 = \{z \;:\; \mathrm{Im}\,(z) > c\}$, $c > 0$.

<u>Komplex függvények differenciálhatósága</u>

Vizsgáljuk meg, vajon differenciálhatók-e az alábbi komplex függvények.

16. $f(z) = y^3 - 3x^2y + i\left(x^3 - 3xy^2\right)$.

17. $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

18. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

19. $f(z) = \mathrm{Im}\,(z)$.

20. $f(z) = z^2$.

21. $f(z) = \overline{z}^2$.

22. $f(z) = 2x + xy^2 i$.

23. $f(z) = e^x(\cos(y) - i\sin(y))$.

24. $f(z) = z^3$.

25. $f(z) = x^3 - (y-1)^3 i$.

26. $f(z) = 1 - iz$.

27. $f(z) = |z|$.

Harmonikus függvények

28. Vizsgáljuk meg, harmonikusak-e a következő függvények. Ha igen, keressük meg harmonikus társukat és írjuk fel a kapott komplex függvényt.

    (a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

    (b) $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

    (c) $u(x, y) = \text{sh}\,(x) \sin(y)$.

    (d) $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

    (e) $v(x, y) = -\sin(x)\text{ch}\,(y)$.

29. Milyen $C \epsilon \mathbb{R}$ esetén lesz $v(x, y)$ egy analitikus függvény *képzetes része*?

$$v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$$

30. Milyen C paraméter esetén lesz $u(x, y)$ egy analitikus függvény *valós része*?

$$u(x, y) = Cx^2y - y^3?$$

    Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1+i$ pontban, $u(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül.*

31. Igazolja, hogy alábbi függvény egy analitikus függvény *képzetes része*:

$$v(x, y) = \text{ch}\,(x) \cos(y)$$

    Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $v(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül.*

32. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = (x - 2)(y + 1)$$

    Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1-i$ pontban, $u(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül.*

33. Milyen C paraméter esetén lesz $u(x,y)$egy analitikus függvény *valós része*?

$$u(x,y) = \ln(x^2 + Cy^2)?$$

Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $u(x,y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül.*

Elemi függvények kiterjesztése

Határozzuk meg az alábbi komplex értékeket:

34. $e^{1+i} =?$

35. $e^{1-i} =?$

36. $\ln(-1) =?$

37. $\ln(1+i) =?$

38. $\ln(1-i) =?$

39. $\ln(-i) =?$

40. $\ln(-1) =?$

41. (*) $(1+\sqrt{3}i)^i =?$