

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok vizsgára

2018. május 22.

Komplex függvények kanonikus alakja

Írjuk fel az alábbi függvények kanonikus alakját:

1. $f(z) = z^2$

2. $f(z) = (z - 1)^2$

3. $f(z) = \frac{1}{z}$

4. $f(z) = \frac{1}{z^2}$

5. $f(z) = e^{z+1}$

6. $f(z) = e^{-z}$

7. $f(z) = (1 + 2i)z$

8. $f(z) = \frac{1+i}{z}$

Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg, hogy az alábbi f függvények az adott D tartománynak mit feleltetnek meg.

Rajzoljuk le az eredeti D tartományt és ennek $f(D)$ képét is.

9. $f(z) = -2z$, $D = \{z : |z| = 1\}$.

10. $f(z) = \bar{z}$, $D = \{z : \text{Im}(z) < 0\}$.

11. $f(z) = (1 + i)z$, $D = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$.

12. $f(z) = -iz - 1$, $D = \{z : |z| < 1\}$.

13. $f(z) = (-1 + i)z$, $D = \{z : |z| > 1\}$.

14. Határozzuk meg, hogy az $f(z) = \frac{1}{z}$ leképezés a komplex a sík adott tartományainak mit feleltet meg:

(a) $D_1 = \{z : 0 < \operatorname{Re}(z)\}$.

(b) $D_2 = \{z : \operatorname{Re}(z) > 1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(c) $D_3 = \{z : \operatorname{Im}(z) > c\}, c > 0$.

Komplex függvények differenciálhatósága

Vizsgáljuk meg, vajon differenciálhatók-e az alábbi komplex változós függvények.

15. $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2)$.

16. $f(z) = \frac{1}{z}$.

17. $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

18. $f(z) = \operatorname{Im}(z)$.

19. $f(z) = z^2$.

20. $f(z) = \bar{z}^2$.

21. $f(z) = 2x + xy^2i$.

22. $f(z) = e^x(\cos(y) - i \sin(y))$.

23. $f(z) = z^3$.

24. $f(z) = x^3 - (y - 1)^3i$.

25. $f(z) = 1 - iz$.

26. $f(z) = |z|$.

Harmonikus függvények

Vizsgáljuk meg, harmonikusak-e a következő függvények.

Ha igen, keressük meg harmonikus társukat és írjuk fel a kapott komplex függvényt.

27. $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

28. $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

29. $u(x, y) = \operatorname{sh}(x) \sin(y)$.

30. $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

31. $v(x, y) = -\sin(x) \operatorname{ch}(y)$.

32. Milyen C paraméter esetén lesz $v(x, y)$ egy analitikus függvény *képzetes* része?

$$v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$$

A kapott C paraméter mellett határozzuk meg harmonikus társát.

33. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós* része:

$$u(x, y) = Cx^2y - y^3?$$

Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1 + i$ pontban, $u(x, y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

34. Igazolja, hogy alábbi függvény egy analitikus függvény *képzetes része*:

$$v(x, y) = \operatorname{ch}(x) \cos(y)$$

Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $v(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül*.

35. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = (x - 2)(y + 1)$$

Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1 - i$ pontban, $u(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül*.

36. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + Cy^2)?$$

Számítsuk ki az analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $u(x, y)$ *harmonikus társának meghatározása nélkül*.

Elemi függvények kiterjesztése

Határozzuk meg az alábbi komplex értékeket:

37. $e^{1+i} = ?$

38. $e^{1-i} = ?$

39. $\ln(-1) = ?$

40. $\ln(1 + i) = ?$

41. $\ln(1 - i) = ?$

42. $i^{1-i} = ?$

43. $\ln(-i) = ?$

44. $(-1)^{-i} = ?$

45. $\ln(-1) = ?$

46. $(1 + \sqrt{3}i)^i = ?$

47. $2^{1+i} = ?$

48. $2^{1-i} = ?$

49. $\sin(i) = ?$

50. $\sin(1 + i) = ?$

51. $\cos(i) = ?$

52. $\cos(1 - i) = ?$