KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok vizsgára

2015. május 22.

Komplex számok, ismétlés

Végezze el az alábbi számításokat:

5.1. $i^{3/4}$

5.2. $e^{1-i\pi/4}$

5.3. $(1+i)^3$

5.6. $(1-i)^{1/3}$

5.4. $\sum_{n=1}^{6} i^n$

5.7. $\dfrac{1+2i}{1-i}$

5.5. $\sum_{n=1}^{3} (1+i)^n$

5.8. $\sum_{n=0}^{6} \left(\dfrac{i}{2}\right)^n$

Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg, hogy az alábbi f függvények a megadott D tartománynak mit feleltetnek meg. Rajzoljuk le az eredeti D tartományt és ennek $f(D)$ képét is. (Használjuk fel, hogy analitikus függvény esetén tartomány határának képe a képtartomány határa lesz.)

5.9. $f(z) = 2z$, $D = \{z : |z| = 1\}$.

5.10. $f(z) = \bar{z}$, $D = \{z : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

5.11. $f(z) = (1+i)z$, $D = \{z : \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

5.12. $f(z) = 1 + iz$, $D = \{z : \mathrm{Re}\,(z) > 0 \text{ és } 0 < \mathrm{Im}\,(z) < 2\}$.

5.13. $f(z) = -iz - 1$, $D = \{z : |z| < 1\}$.

5.14. $f(z) = (-1+i)z, \;\; D = \{z : |z| > 1\}$.

Határozzuk meg, hogy az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ leképezés a komplex a sík adott tartományainak mit feleltet meg:

5.15. $D_1 = \{z \;:\; 0 < \mathrm{Re}\,(z)\}$.

5.16.* $D_2 = \{z \;:\; \mathrm{Re}\,(z) > 1, \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$.

5.17.* $D_3 = \{z \;:\; \mathrm{Im}\,(z) > c\}$, $c > 0$.

Komplex függvények differenciálhatósága

Vizsgáljuk meg, vajon differenciálhatók-e az alábbi komplex változós függvények.

Ahol csak a kanonikus alak van megadva, próbáljuk meg $f(z)$-t *közvetlenül z függvényében* megadni.

5.18. $f(z) = y^3 - 3x^2y + i\,(x^3 - 3xy^2)$.

5.19. $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

5.20. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$.

5.21. $f(z) = \mathrm{Re}\,(z)$.

5.22. $f(z) = z^2$.

5.23. $f(z) = \overline{z}^2$.

5.24. $f(z) = 2x + xy^2 i$.

5.25. $f(z) = e^x(\cos(y) - i\sin(y))$.

5.26 $f(z) = z^3$.

5.27. $f(z) = x^3 - (y-1)^3 i$.

5.28. $f(z) = 1 - iz$.

5.29. $f(z) = |z|$.

Harmonikus függvények

Vizsgáljuk meg, harmonikusak-e a következő függvények. Ha igen, keressük meg harmonikus társukat. Írjuk fel a kapott komplex függvényt is.

5.30. $u(x,y) = 2x(1-y)$.

5.31. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

5.32. $u(x, y) = \operatorname{sh}(x)\sin(y)$.

5.33. $v(x, y) = e^x \sin(y)$.

5.34. $v(x, y) = -\sin(x)\operatorname{ch}(y)$.

5.35. Milyen C paraméter esetén lesz $v(x, y)$ egy analitikus függvény *képzetes része*?

$$v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$$

A kapott C paraméter mellett határozza meg harmonikus társát.

5.36. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = Cx^2y - y^3?$$

Számítsa ki a megfelelő analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1 + i$ pontban, $u(x, y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

5.37. Igazolja, hogy alábbi függvény egy analitikus függvény *képzetes része*:

$$v(x, y) = \operatorname{ch}(x)\cos(y)$$

Számítsa ki a megfelelő analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $v(x, y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

5.38. Igazoljuk, hogy az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = (x - 2)(y + 1)$$

Számítsa ki a megfelelő analitikus függvény deriváltját a $z_0 = 1 - i$ pontban, $u(x, y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

5.39. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x, y) = \ln(x^2 + Cy^2)?$$

Számítsa ki a megfelelő analitikus függvény deriváltját a $z_0 = i$ pontban, $u(x, y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

Komplex vonalintegrál

5.40.

$$\int_\Gamma (z^2 + 1)\, dz = ?$$

ha Γ a $z_1 = 0$ és $z_2 = 1 + i$ pontokat összekötő szakasz, $z_1 = 0$-ból indítva.

5.41. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z + 2}{z}$ függvényt a

1. $\Gamma_1 = \{z = 2e^{i\varphi} \ : \ 0 \le \varphi \le \pi\}$ mentén, növekvő φ irányban.

2. $\Gamma_2 = \{z = 2e^{i\varphi} \ : \ 0 \geq \varphi \geq -\pi\}$ mentén, csökkenő φ irányában befutva.
3. $\Gamma_3 = \{z = 2e^{i\varphi} \ : \ -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$ mentén, növekvő φ irányában.

5.42. Legyen Γ a $z_0 = 1$ középpontú egységkörnek az a fele, ahol a képzetes rész nemnegatív.

$$\int_\Gamma (z-1)\, dz = ?$$

5.43. Integráljuk az $f(z) = z - 1$ függvényt, Γ legyen a valós tengely $0 \leq x \leq 2$ szakasza növekvő x irányban!

5.44. A $\Gamma = \{z \ : \ |z-1| = 2\}$ zárt görbe mentén számuljuk ki az alábbi integrálokat:

$$(a) \quad \oint_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\, dz = ? \qquad\qquad (b) \quad \oint_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^3}\, dz = ?$$

(*Ötlet*: Alkalmazzuk a Cauchy-féle integrálformulát.)

5.45. Integráljuk az $f(z) = e^z$ függvényt a $z_1 = i\pi, z_2 = 1$ pontokat összekötő szakasz mentén, z_1-ből indulva.

Elemi függvények kiterjesztése

Határozzuk meg az alábbi komplex értékeket:

5.46. $\ln(1+i) = ?$

5.47. $\ln(1-i) = ?$

5.48. $\ln(-i) = ?$

5.49. $(1+\sqrt{3}i)^i = ?$

5.50. $2^{1+i} = ?$

5.51. $2^{1-i} = ?$

5.52. $\ln(-1) = ?$

5.53. $i^{1-i} = ?$

5.54. $e^{1+i} = ?$

5.55. $e^{1-i} = ?$

5.56. $\sin(i) = ?$ $\sin(1+i) = ?$

5.57. $\cos(i) = ?$ $\cos(1-i) = ?$