KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok vizsgára

2013. június 4.

Komplex számok, ismétlés

Végezzük el az alábbi számításokat:

5.1. $i^{3/4}$

5.2. $e^{1-i\pi/4}$

5.3. $(1+i)^3$

5.6. $(1-i)^{1/3}$

5.5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{3}(1+i)^n$

5.4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{6} i^n$

5.7. $\dfrac{1+2i}{1-i}$

5.8. $\displaystyle\sum_{n=0}^{6}\left(\frac{i}{2}\right)^n$

Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg a komplex számsíknak azon tartományát, melyet az alábbi leképezés feleltet meg a komplex sík adott tartományának! Felhasználhatjuk azt a tényt, hogy analitikus függvény esetén tartomány határának képe a képtartomány határa lesz.)

5.9. $f(z) = 2z, \qquad D = \{z \;:\; |z| = 1\}.$

5.10. $f(z) = \dfrac{1}{z}, \qquad \{z = x + iy \;:\; y > 0\}.$

5.11. $f(z) = (1+i)z, \qquad \{z : \mathrm{Im}(z) > 0\}$

5.12. $f(z) = 1 + iz, \qquad \{z : \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ és } 0 < \mathrm{Im}(z) < 2\}$

5.13. $f(z) = -iz - 1, \qquad \{z : |z| < 1\}.$

5.14. $f(z) = (-1+i)z, \qquad \{z : |z| > 1\}.$

Határozzuk meg, hogy az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ leképezés a komplex a sík bizonyos tartományainak mit feleltet meg:

5.15. *(Módosult)* $D_1 = \{z \ : \ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}.$

5.16. $D_2 = \{\mathrm{Re}(z) > 1, \mathrm{Im}(z) > 0\}.$

5.17. $D_3 = \{\mathrm{Im}(z) > c\}$, ahol $c > 0$.

Komplex függvények differenciálhatósága

Vizsgáljuk meg, vajon differenciálhatók-e az alábbi komplex változós függvények. Ahol csak a kanonikus alak van megadva, próbáljuk meg z függvńyében megadni $f(z)$-t.

5.18. $f(z) = y^3 - 3x^2y + i\left(x^3 - 3xy^2\right).$

5.19. $f(z) = \dfrac{1}{z}.$

5.20. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}.$

5.21. $f(z) = \mathrm{Re}(z).$

5.22. $f(z) = z^2.$

5.23. $f(z) = \overline{z}^2.$

5.24. $f(z) = 2x + xy^2 i.$

5.25. $f(z) = e^x(\cos y - i \sin y).$

5.26 $f(z) = z^3.$

5.27. $f(z) = x^3 - (y-1)^3 i.$

5.28. $f(z) = 1 - iz.$

5.29. $f(z) = |z|.$

Harmonikus függvények

Vizsgáljuk meg, harmonikusak-e a következő függvények. Ha igen, keresse meg harmonikus társukat.

5.30. $u(x,y) = 2x(1-y).$

5.31. $u(x,y) = 2x - x^3 + 3xy^2.$

5.32. $u(x,y) = \sinh x \cdot \sin y.$

5.33. $v(x,y) = e^x \cdot \sin y.$

5.34. $v(x,y) = -\sin x \cdot \sinh y.$

5.35. Milyen C paraméter esetén lesz $v(x,y)$ egy analitikus függvény *képzetes része*?

$$v(x,y) = Cx^2 - y^2 + 2y$$

A kapott C paraméter mellett határozza meg harmonikus társát.

5.36. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény *valós része*:

$$u(x,y) = Cx^2y - y^3?$$

Számítsa ki a megfelelő analitikus függvény deriváltját, $u(x,y)$ harmonikus társának meghatározása nélkül.

Komplex vonalintegrál

5.38. *(Új feladat)*

$$\int_\Gamma (z^2+1)\,dz = ?$$

ha Γ a $z_1 = 0$ és $z_2 = 1+i$ pontokat összekötő szakasz, $z_1 = 0$-ból indítva.

5.39. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvényt a $\Gamma = \{z = 2e^{i\varphi}; 0 \le \varphi \le \pi\}$ mentén, növekvő φ irányban!

5.40.

$$\int_\Gamma \frac{z+2}{z}\,dz = ? \qquad \Gamma = \{z = 2e^{i\varphi} \ : \ 0 \ge \varphi \ge -\pi\}.$$

5.41. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvényt $\Gamma = \{z = 2e^{i\varphi}; -\pi \le \varphi \le \pi\}$ mentén, növekvő φ irányában!

5.42. Legyen Γ a $z_0 = 1$ középpontú egységkörnek az a fele, ahol a képzetes rész nemnegatív.

$$\int_\Gamma (z-1)\,dz = ?$$

5.43. Integráljuk az $f(z) = z-1$ függvényt, Γ legyen a valós tengely $0 \le x \le 2$ szakasza növekvő x irányban!

5.44. *(Új feladat)*

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = ?, \qquad \Gamma = \{z \ : \ |z-1| = 2\}.$$

5.45. Integráljuk az $f(z) = e^z$ függvényt a $z_1 = i\pi, z_2 = 1$ pontokat összekötő szakasz mentén, z_1-ből indulva.

5.45.B. *(Új feladat)*

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{(z-1)^2}\,dz = ?, \qquad \Gamma = \{z \ : \ |z-1| = 2\}.$$

Logaritmus. Hatványfüggvény

5.46. $\ln(1+i) =?$

5.47. $\ln(1-i) =?$

5.48. $\ln(-i) =?$

5.49. $(1+i)^i =?$

5.50. $2^{1+i} =?$

5.51. $2^{1-i} =?$

(Új feladatok)

5.52. $\ln(-1) =?$

5.53. $i^{1-i} =?$