ANALÍZIS II. VIZSGA

KOMPLEX FÜGGVÉNYTAN

Gyakorló feladatok vizsgára

Komplex számok, ismétlés

Végezze el az alábbi számításokat:

5.1. $i^{3/4}$

5.2. $e^{1-i\pi/4}$

5.3. $(1+i)^3$

5.4. $\sum_{n=1}^{6} i^n$

5.5. $\sum_{n=1}^{3} (1+i)^n$

5.6. $(1-i)^{1/3}$

5.7. $\dfrac{1+2i}{1-i}$

5.8. $\sum_{n=0}^{6} \left(\dfrac{i}{2}\right)^n$

Komplex függvények értelmezése

Határozzuk meg a komplex számsíknak azon tartományát, melyet az alábbi leképezés feleltet meg a komplex sík adott tartományának!
(Használja fel, hogy analitikus függvény esetén tartomány határának képe a képtartomány határa lesz.)

5.9. $f(z) = 2z, \qquad \{z \ : \ |z| = 1\}$

5.10. $f(z) = \dfrac{1}{z}, \qquad \{z = x + iy \ : \ y > 0\}$

5.11. $f(z) = (1+i)z, \qquad \{z : Im(z) > 0\}$

5.12. $f(z) = 1 + iz, \qquad \{z : Re(z) > 0 \text{ és } 0 < Im(z) < 2\}$

5.13. $f(z) = -iz - 1, \qquad \{z : |z| < 1\}$

5.14. $f(z) = (-1+i)z, \qquad \{z : |z| > 1\}$

Határozza meg, hogy a komplex a sík alábbi tartományainak mit feleltet meg az $f(z) = \dfrac{1}{z}$ leképezés:

5.15. $\left\{0 < Re(z) < \dfrac{1}{2c}\right\}$

5.16. $\{Re(z) > 1, Im(z) > 0\}$

5.17. $\{Im(z) > c\}$, $c > 0$

Komplex függvények differenciálhatósága

Vizsgálja meg, differenciálhatók-e az alábbi komplex változós függvények!

5.18. $w = y^3 - 3x^2y + i\left(x^3 - 3xy^2\right).$

5.19. $w = \dfrac{1}{z}.$

5.20. $w = \dfrac{1}{z^2}.$

5.21. $w = Re(z).$

5.22. $w = z^2.$

5.23. $w = \overline{z}^2.$

5.24. $w = 2x + xy^2 i.$

5.25. $w = e^x(\cos y - i \sin y).$

5.26 $w = z^3.$

5.27. $w = x^3 - (y-1)^3 i.$

5.28. $w = 1 - iz.$

5.29. $w = |z|.$

Harmonikus függvények

Vizsgálja meg, harmonikusak-e a következő függvények, s ha igen, keresse meg harmonikus társukat!

5.30. $u(x, y) = 2x(1 - y)$.

5.31. $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$.

5.32. $u(x, y) = \sinh x \cdot \sin y$.

5.33. $v(x, y) = e^x \cdot \sin y$.

5.34. $v(x, y) = -\sin x \cdot \sinh y$.

5.35. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény képzetes része?

$$v(x, y) = Cx^2 - y^2 + 2y$$

Határozza meg harmonikus társát!

5.36. Milyen C paraméter esetén lesz az alábbi függvény egy analitikus függvény valós része?

$$u(x, y) = Cx^2y - y^3$$

Határozza meg az analitikus függvény deriváltját!

Komplex vonalintegrál

5.38. Integráljuk az $f(z) = y - x - 3x^2 i$ függvényt a $z_1 = 0$ és $z_2 = 1 + i$ pontokat összekötő szakasz mentén, azt z_1-ből z_2-be befutva.

5.39. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvényt a $\Gamma = \{z = 2e^{i\varphi}; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ mentén, növekvő φ irányban!

5.40. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvényt

$$\Gamma = \{z = 2e^{i\varphi}; \varphi_1 = 0, \varphi_2 = -\pi\}$$

mentén, csökkenő φ irányában befutva!

5.41. Integráljuk az $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$ függvényt $\Gamma = \{z = 2e^{i\varphi}; -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$ mentén, növekvő φ irányában!

5.42. Integráljuk az $f(z) = z - 1$ függvényt $\Gamma = \{z = e^{i\varphi} + 1; 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ mentén, növekvő φ irányában!

5.43. Integráljuk az $f(z) = z - 1$ függvényt, Γ legyen az x tengely $0 \leq x \leq 2$ szakasza növekvő x irányban!

5.44. Integráljuk az

$$f(z) = \begin{cases} 4y, & \text{ha } y > 0 \\ 1 & \text{ha } y < 0 \end{cases}$$

függvényt $\Gamma = \{z = x + iy \ : \ y = x^3, -1 \leq x \leq 1\}$ mentén növekvő x irányban!

5.45. Integráljuk az $f(z) = e^z$ függvényt a $z_1 = i\pi, z_2 = 1$ pontokat összekötő szakasz mentén, z_1-ből z_2-be futva!

Logaritmus. Hatványfüggvény

5.46. $\ln(1 + i) =?$

5.47. $\ln(1 - i) =?$

5.48. $\ln(-i) =?$

5.49. $(1 + i)^i =?$

5.50. $2^{1+i} =?$

5.51. $2^{1-i} =?$

MEGOLDÁSOK

Komplex számok, ismétlés

5.1

$$z = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k}{4}2\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k}{4}2\pi\right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

5.2 $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Komplex függvények értelmezése

5.9 $\{w \ : \ |w| = \sqrt{2}\}$.

5.11. $\{Im(w) > Re(w)\}$

5.12. $-1 < Re(w) < 1$ és $Im(z) > 0$

5.13. $(u+1)^2 + v^2 < 1$ körtartomány

5.14. $u^2 + v^2 > 2$ körkülső

5.15. Az $\{Im(w) > 0\}$ félsík $v^2 + (v+c)^2 = c^2$ körön kívüli része

5.16. Az $\left(u - \dfrac{1}{2}\right)^2 + v^2 < \dfrac{1}{4}$ kör $\{Im(v) < 0\}$ félkörének belseje

5.17. A határon $z = x + ic$, ennek képe:

$$f(x+ic) = \frac{1}{x+ic} = \frac{x-ic}{x^2+c^2} = w.$$

Könnyen látható, hogy ez egy kör, nevezetesen:

$$\left|w - \frac{i}{2c}\right| = \frac{x^2}{(x^2+c^2)} + \left(\frac{c}{x^2+c^2} - \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{x^2+c^2}{(x^2+c^2)^2} - \frac{1}{x^2+c^2} + \frac{1}{4c^2} = \left(\frac{1}{2c}\right)^2$$

Ezért a keresett képtér: $\{w \ : \ |w - i\dfrac{1}{2c}| < \dfrac{1}{2c}\}$.

Komplex függvények differenciálhatósága

5.18. A függvény az egész számsíkon differenciálható.

5.19. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

5.20. A függvény a $z = 0$ kivételével mindenütt differenciálható.

5.21. A függvény sehol sem differenciálható.

5.22. A függvény differenciálható.

5.23. A függvény csak a $z = 0$ pontban differenciálható.

5.24. A függvény nem differenciálható.

5.25. A függvény nem differenciálható.

5.26. A függvény differenciálható.

5.27. A függvény csak a $z = i$ pontban differenciálható.

5.28. A függvény differenciálható.

5.29. A függvény nem differenciálható.

Harmonikus függvények

5.30. Harmonikus, $v(x, y) = x^2 - (1 - y)^2$.

5.31. Harmonikus, $v(x, y) = 2y - 3x^2y + y^3$.

5.32. Harmonikus, $v(x, y) = -\cosh x \cdot \cos y$.

5.33. Harmonikus, $u(x, y) = e^x \cdot \cos y$.

5.34. Harmonikus, $u(x, y) = \cos x \cdot \cosh y$.

5.35. $C = 1$, $v(x, y) = -2xy + 2x$.

5.36. $C = 3$. $f'(z) = 6xy - i(3x^2 - 3y^2)$.

Komplex vonalintegrál

5.38.

$$f(z) = y - x - 3x^2 i \qquad \Gamma : z_1 = 0 \qquad z_2 = 1 + i$$
$$x = t \qquad y = t \qquad 0 \le t \le 1$$
$$z(t) = t + it \qquad z'(t) = 1 + i$$

$$\int_0^1 \left[(t - t) - 3t^2 i\right](1 + i)dt = (-1 + i)\left[-t^3\right]_0^1 = 1 - i$$

5.39.

$$f(z) = \frac{z + 2}{z} = 1 + \frac{2}{z}, \qquad z(\varphi) = 2e^{i\varphi},\ z'(\varphi) = 2ie^{i\varphi} 1 \le \varphi \le \pi$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(1 + \frac{2}{2e^{i\varphi}}\right) 2ie^{i\varphi} d\varphi &= 2i \int_0^\pi \left(e^{i\varphi} + 1\right) d\varphi = 2i \left[\frac{e^{i\varphi}}{i} + \varphi\right]_0^\pi = \\
&= 2\left[e^{i\varphi} + i\varphi\right]_0^\pi = \\
&= 2\left(\cos\pi + i\sin\pi + i\pi - 1\right) = \\
&= 2i\pi - 4.
\end{aligned}$$

5.40.

$$\begin{aligned}
2i \int_0^{-\pi} \left(e^{i\varphi} + 1\right) d\varphi &= 2i \left[\frac{e^{i\varphi}}{i} + \varphi\right]_0^{-\pi} = 2\left[e^{i\varphi} + i\varphi\right]_0^{-\pi} = \\
&= 2[\cos(-\pi) - i\pi + i\sin(-\pi) - 1] = -4 - 2i\pi
\end{aligned}$$

5.41.

$$\begin{aligned}
2i \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{i\varphi} + 1\right) d\varphi &= 2i \left[\frac{e^{i\varphi}}{i} + \varphi\right]_{-\pi}^{\pi} = \\
&= 2\left[(\cos\pi + i\sin\pi + i\pi) - \right. \\
&- \left.(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi) - i\pi)\right] = \\
&= 2\left[-1 + i\pi + 1 + i\pi\right] = 4i\pi
\end{aligned}$$

5.42. $f(z) = z - 1 \qquad z = e^{i\varphi} + 1 \qquad 0 \le \varphi \le \pi \qquad z' = ie^{i\varphi}$

$$\begin{aligned}
\int f(z)dz &= \int_0^\pi \left[e^{i\varphi} + 1 - 1\right] ie^{i\varphi} d\varphi = i\left[\frac{e^{2i\varphi}}{2i}\right]_0^\pi = \\
&= \frac{1}{2}[\cos 2\pi + i\sin 2\pi - \cos 0 - i\sin 0] = 0.
\end{aligned}$$

5.43.

$$f(z) = z - 1 = x + iy - 1; \qquad x = t; \qquad y = 0; \qquad 0 \le t < 2; \qquad z = t + 0i$$
$$z' = 1.$$

$$\int_0^2 (t-1)dt = \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_0^2 = 2 - 2 = 0.$$

5.44.

$$f(z) = \begin{cases} 4y, & \text{ha } y > 0 \\ 1, & \text{ha } y < 0, \quad z = x + iy \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \Gamma : y = x^3, & -1 \le x \le 1 \\ \Gamma : x = t & y = t^3 \\ \quad z = t + t^3 i, & z' = 1 + 3t^2 i \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int f(z)dz &= \int_0^{-1} 1\left(1 - i3t^2\right)dt + \int_0^1 4t^3\left(1 + t^2 3i\right)dt = \\ &= \left[t - t^3 i\right]_{-1}^0 + \left[t^4 + 12\frac{t^6}{6}i\right]_0^1 = \\ &= -(-1 - i) + (1 + 2i) = 2 + 3i. \end{aligned}$$

5.45.

$$\begin{array}{lll} f(z) = e^z & z_1 = i\pi, z_2 = 1 & (y = \pi(1-x)) \\ \quad x = t & y = \pi(1-t) & 0 \le t \le 1 \\ \quad z = t + i\pi(1-t) & z' = 1 - \pi i & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{t + i\pi(1-t)}(1 - \pi i)dt &= (1 - \pi i)\left[\frac{e^{t+i\pi(1-t)}}{1 - i\pi}\right]_0^1 = e - e^{\pi} = \\ &= e - \cos\pi - i\sin\pi = 1 + e. \end{aligned}$$