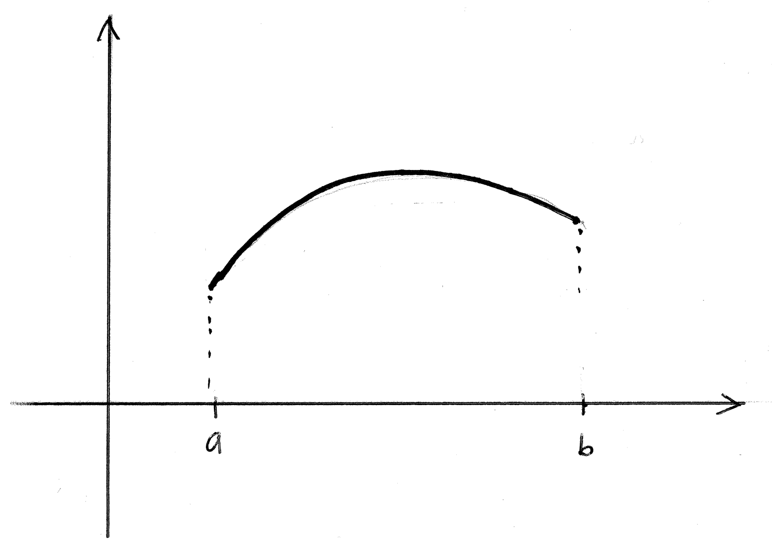
Az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásai

2015. november 26.

Függvény gráfjának hossza

Feladatunk egy folytonos, sima függvény gráfjának hosszát meghatározni.

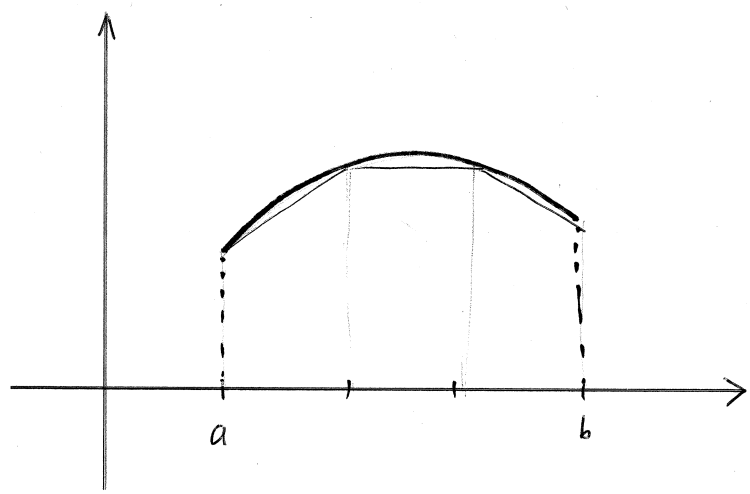


Az f függvény egy véges, zárt intervallumon van értelmezve. Feltesszük hogy gráfja sima – ez azt jelenti, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Gráfjának pontjai:

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Ennek hosszát kell meghatározni.

A függvény gráfjának ívhosszát egyenes szakaszokkal közelítjük, mert egy törtvonal hosszát ismerjük:



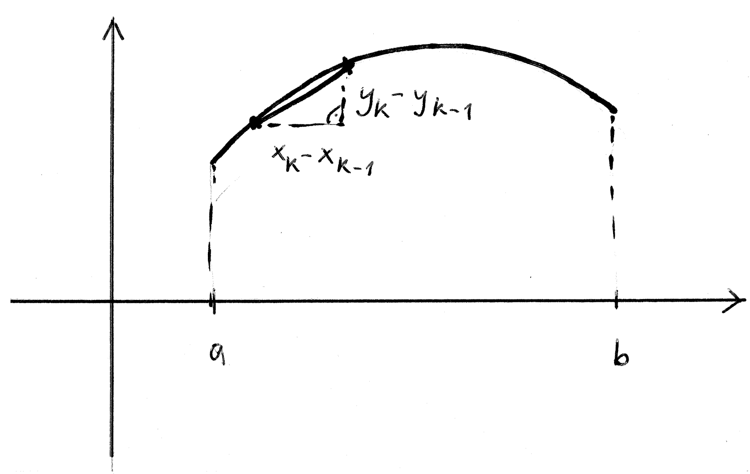
Ehhez az $[a, b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ felosztását tekintjük:

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

A gráf megfelelő pontjait jelölje (x_k, y_k), ahol $y_k = f(x_k)$.

A k-adik ívdarab hosszának közelítése (Pithagorasz tétel alapján):

$$s_k \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$



Így az ívhossz egy közelítése

$$s(\Gamma) \approx s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k, \qquad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k). \tag{1}$$

Az utolsó lépésben Lagrange féle középértéktételt használtunk a gyökjel alatti különbségi hányados átalakítására.

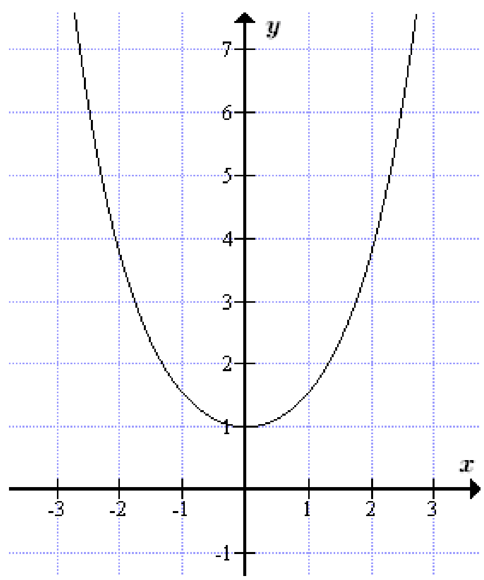
Az (1) egyenletben szereplő összeg egy integrál közelítő Riemann-összeg. Ezért, ha a felosztás finomsága 0-hoz tart, határértékként egy integrált kapunk.

Bebizonyítottuk az alábbi tételt:

Tétel. *Legyen* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvény. Ekkor gráfjának hossza:*

$$s(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx. \tag{2}$$

Példa. Tekintsük az $y = \mathrm{ch}(x)$ görbének azt a darabját, mely az $x = 0$ és $x = 2$ abszcisszájú pontok közé esik. Mekkora ennek hossza?



Megoldás. A függvény deriváltja

$$f'(x) = \mathrm{sh}(x).$$

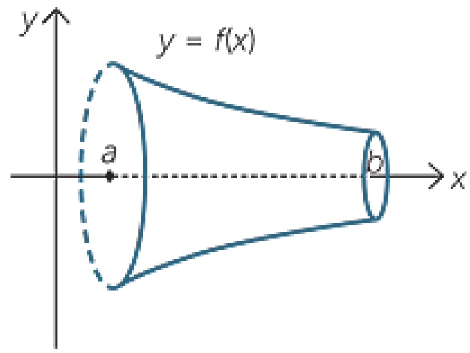
A (2) képletet alkalmazva:

$$s(\Gamma) = \int_0^2 \sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(x)} \, dx == \int_0^2 \sqrt{ch^2(x)} \, dx = \int_0^2 \mathrm{ch}(x) \, dx =$$

$$= \big[\operatorname{sh}(x)\big]_0^2 = \operatorname{sh}(2) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} \approx 3.627...$$

Forgástest térfogata

Legyen adott egy $f[a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvény. Képzeljük el, hogy a függvény gráfját megforgatjuk az x tengely körül.



Az így kapott test térfogatát szeretnénk meghatározni.

Újra közelítéssel kezdünk. Felosztjuk az $[a,b]$ intervallumot:

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

A forgástestet kis hengerekkel közelítjük, a k-dik henger alapkörének sugara $f(x_k)$, magassága $x_k - x_{k-1}$. Ezek térfogatának összege:

$$V(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} f^2(x_k)\pi \cdot \Delta x_k,$$

ami egy integrálközelítő összeg. $n \to \infty$ határátmenettel, ha $\max \Delta x_k \to 0$, megkapjuk az alábbi állítást.

Állítás. Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ integrálható. Ekkor a forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

Példa. Legyen $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Határozzuk meg a görbe megforgatásával kapott test térfogatát.

Megoldás. A térfogat:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{4 - x^2})^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (4 - x^2)\, dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = (8 - \frac{2}{3})\pi.$$