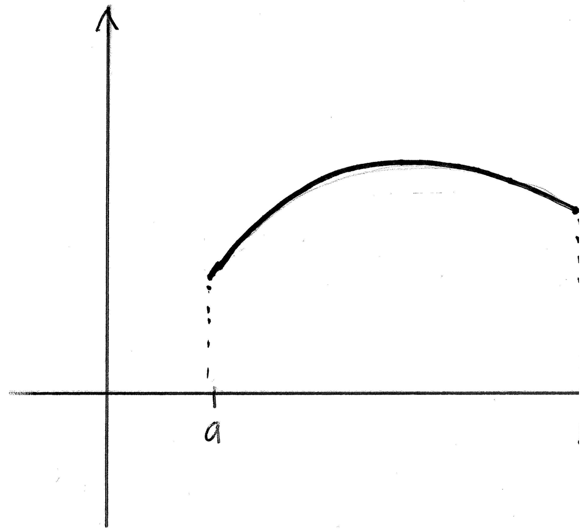
Az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásai

2012. december 6.

Függvény gráfjának hossza

Feladatunk egy folytonos, sima függvény gráfjának hosszát meghatározni.

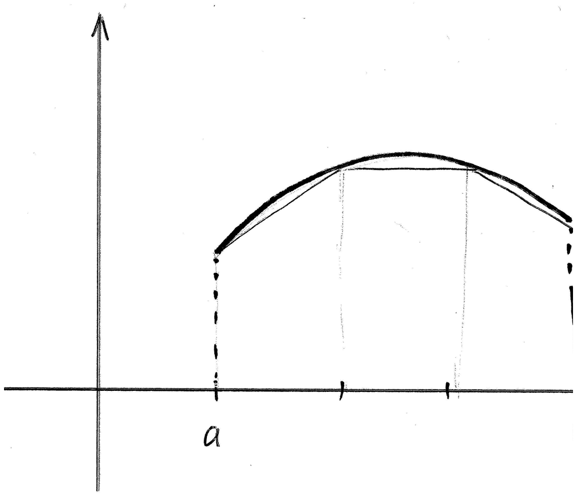


Az f függvény egy véges, zárt intervallumon van értelmezve. Feltesszük hogy gráfja sima – ez azt jelenti, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Gráfjának pontjai:

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Ennek hosszát kell meghatározni.

A függvény gráfjának ívhosszát egyenes szakaszokkal közelítjük, mert egy törtvonal hosszát ismerjük:

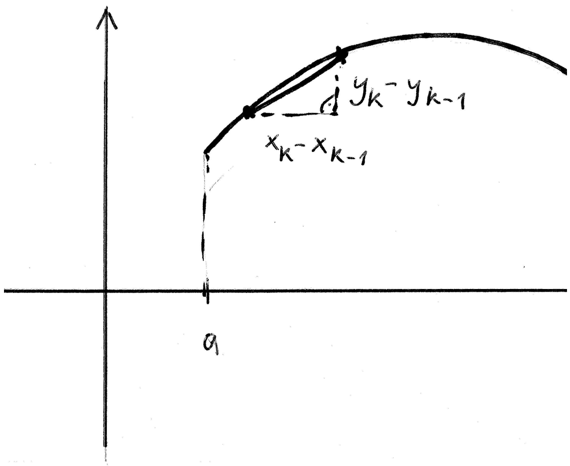


Ehhez az $[a,b]$ intervallum egy $\mathcal{F}$ felosztását tekintjük:

$$\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}.$$

A gráf megfelelő pontjait jelölje (x_k, y_k), ahol $y_k = f(x_k)$.
A k-adik ívdarab hosszának közelítése (Pithagorasz tétel alapján):

$$s_k \approx \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$



Így az ívhossz egy közelítése

$$s(\Gamma) \approx s(\mathcal{F}) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \cdot \Delta x_k, \qquad \xi_k \in (x_{k-1}, x_k). \tag{1}$$

Az utolsó lépésben Lagrange féle középértéktételt használtunk a gyökjel alatti különbségi hányados átalakítására.

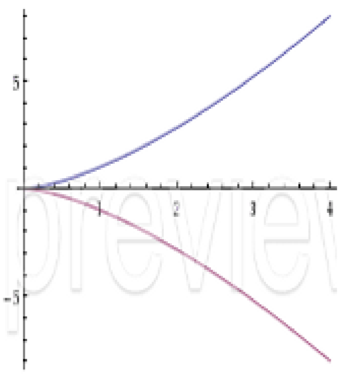
Az (1) egyenletben szereplő összeg egy integrál közelítő Riemann-összeg. Ezért, ha a felosztás finomsága 0-hoz tart, határértékként egy integrált kapunk.

Bebizonyítottuk az alábbi tételt:

Tétel. *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény. Ekkor gráfjának hossza:*

$$s(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{2}$$

Példa. Tekintsük az $y^2 = x^3$ görbének azt a darabját, mely az $(1, 1)$ és $(4, 8)$ pontok közé esik. Mekkora ennek hossza?



Megoldás. A görbét meghatározó függvény explicit alakja - az adott szakaszon meghatározva - $y = f(x) = x^{3/2}$. Ennek deriváltja

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

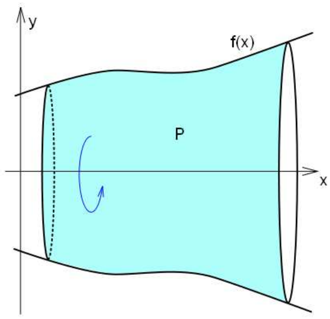
A (2) képletet alkalmazva:

$$s(\Gamma) = \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2} \right)^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx =$$

$$= \left[\frac{\frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4} x\right)^{3/2}}{\frac{9}{4}} \right]_1^4 = 7.633705...$$

Forgástest felszíne és térfogata

Legyen adott egy $f[a,b] \to \mathbb{R}^+$ függvény. Képzeljük el, hogy a függvény gráfját megforgatjuk az x tengely körül.



Az így kapott test felszínét és térfogatát szeretnénk meghatározni.

Állítás. Tegyük fel, hogy $f : [a,b] \to \mathbb{R}^+$ differenciálható. Ekkor a forgástest térfogata:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

A forgástest felszíne:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Példa. Legyen $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Határozzuk meg a görbe megforgatásával kapott test felszínét és térfogatát.

Megoldás. A térfogat:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (\sqrt{4-x^2})^2\,dx = \pi \int_{-1}^{1} (4-x^2)\,dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = (8-\frac{2}{3})\pi.$$

A függvény deriváltja

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \cdot (-2x).$$

Ezért a forgástest (palástjának) felszíne:

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-1}^{1} 2\,dx = 8\pi.$$