Az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásai
- A kettős integrálás -

2011. április 8.

1. A tömegközéppont kiszámítása

A tömegközéppontot két és három dimenzióban ($\mathbb{R}^2$-ben és $\mathbb{R}^3$-ban) hasonlóan kell számolni. Ezért mi most csak a két dimenziós módszer ismertetésére szorítkozunk.

Adott egy sűrűségfüggvény az $R \subset \mathbb{R}^2$-n tartományon. Ez legyen ϱ.

$$\varrho \quad : \quad R \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

A $\varrho(x, y)$ függvény értéke megadja, hogy az (x, y) pontban mekkora a vizsgált lemez (R) sűrűsége. Ez alapján már meg tudjuk határozni a tömegét egy kettős integrállal:

$$m = \iint\limits_R \varrho(x, y)\, dR$$

A tömegközéppont kiszámításához tudnunk kell továbbá a nyomatékokat is.

1. Definíció. *Az x szerinti nyomatékot (m_x) és az y szerinti nyomatékot (m_y) a következőképpen számolhatjuk ki:*

$$m_x = \iint\limits_R x \cdot \varrho(x, y)\, dR$$

$$m_y = \iint\limits_R y \cdot \varrho(x, y)\, dR$$

A tömegközéppontok koordinátái

$$M_x = \frac{m_x}{m} \qquad\qquad M_y = \frac{m_y}{m}$$

Példa. Egy vaslemez tömegközéppontjának meghatározása

Feladat: Adott egy háromszög alakú lemez. Csúcsontjainak koordinátái: $(0,1)$,$(2,1)$, $(0,5)$. Feltesszük, hogy a lemez sűrűsége az y koordinátával lineárisan arányos.

Határozzuk meg a lemez tömegközéppontját!

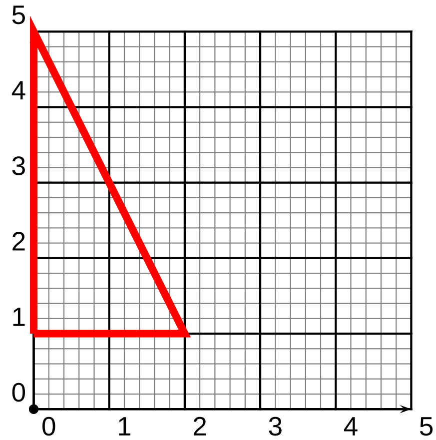
Megoldás: A sűrűségfüggvény:

$$\varrho(x,y) = k \cdot y$$

ahol $k > 0$ egy konstans. A tömeg képlete:

$$m = \iint\limits_R \varrho(x,y)\,dR = \iint\limits_R ky\,dR = k \cdot \iint\limits_R y\,dR$$

A háromszöget lerajzolva látható, hogy azt a legegyszerűbben egy x szerinti normáltartományként foghatjuk fel.



$$0 \le x \le 2$$
$$1 \le y \le -2x+5$$

.

$$R = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le -2x+5\}$$

Az integrálás:

$$m = k \cdot \int_0^2 \int_1^{-2x+5} y\,dy\,dx =$$
$$= k \cdot \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{-2x+5} dx = k \cdot \int_0^2 \frac{(-2x+5)^2-1}{2}\,dx = \ldots = \frac{28}{3}k.$$

Az integrál kiszámításával megkaptuk a tömeget.

Még szükségünk van az m_x és az m_y nyomatékokra.

$$m_x = \iint\limits_R k \cdot xy \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2x+5} xy \, dy \, dx = \ldots = \frac{16}{3}k$$

$$m_y = \iint\limits_R k \cdot y^2 \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2y+5} y^2 \, dy \, dx = \ldots = \frac{76}{3}k$$

Miután ezeket is megkaptuk, a már ismertetett képletekkel ki lehet számolni a tömegközéppont x és y koordinátátját:

$$M_x = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{7} \qquad M_y = \frac{m_y}{m} = \frac{19}{7}$$

2. A felszín

2. Definíció. *Legyen adott egy*

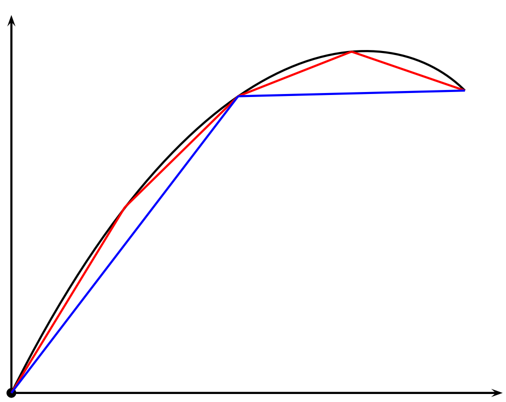
$$f : R \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad R \subset \mathbb{R}^2$$

függvény. Ennek felülete:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \quad | \quad (x, y) \in R\}$$

Az S felület $\mathbb{R}^3$ része, ennek $A(S)$ területét akarjuk meghatározni.

A felszínt ugyan a harmadik dimenzióban számoljuk, de maga az ötlet a második dimenzióból származik. Két dimenzióban ahhoz, hogy megkapjuk a görbe ívhosszát, csak közelítenünk kellett egyenes szakaszokkal:



Ahogy az a fenti ábrán is látszik, minél rövidebb vonalakkal közelítettük, annál pontosabban kaptuk meg az ívhosszt. Felületszámítás esetén az elv ugyan ez marad, de itt egyenesek helyett kis négyzetekkel közelítjük a felületet. (Mint ahogy 2D-ben a görbét a görbe egyes pontjaiba húzható érintőegyenesekkel közelítettük, 3D-ben az érintősík darabkáival közelíthetünk.)

Állítás. *A fenti felület mértéke így számolható:*

$$A(S) = \iint\limits_R \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\, d(x,y)$$

Megjegyzés. Érdemes észrevenni a hasonlóságot a fenti képlet és a Jordan-görbe ívhosszára vonatkozó képlet között: ha $y = f(x)$, $x \in [a,b]$), akkor f gráfjának hossza:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Példa. Egységgömb felső felének a felszínét kiszámoljuk.

A felső félgömböt meghatározó függvény egyenlete:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad (x,y) \in S^2 = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

A szükséges deriváltak:

$$f_x'(x,y) = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$
$$f_y'(x,y) = -2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

A felszín meghatározásához kiszámoljuk az integrandust:

$$\sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)} = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

Ezután maga az integrál - azaz a félgömb felszíne:

$$A(S^3) = \iint\limits_{S^2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r\, d\theta dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr = 2\pi \cdot \Big[-\sqrt{1-r^2}\Big]_0^1 = 2\pi$$