Az integrálszámítás gyakorlati alkalmazásai
- A kettős integrálás -

2013. április 23.

1. A tömegközéppont kiszámítása

A tömegközéppontot két és három dimenzióban hasonlóan kell számolni. Most csak a kétdimenziós esetre szorítkozunk. Egy $R \subset \mathbb{R}^2$ alakú, inhomogén "lemez" tömegközéppontját fogjuk meghatározni.

Adott a $\varrho : R \to \mathbb{R}^+$ sűrűségfüggvény az $R \subset \mathbb{R}^2$-n tartományon. Feltesszük, hogy ϱ integrálható. A $\varrho(x, y)$ függvény értéke megadja, hogy az (x, y) pontban mekkora a vizsgált lemez sűrűsége. Ez alapján meg tudjuk határozni a tömegét egy kettős integrállal.

$$m = \iint_R \varrho(x, y)\, dR$$

A tömegközéppont koordinátáinak meghatározásához először a nyomatékokat számítjuk ki. Az x szerinti nyomatékot m_x és az y szerinti nyomaték m_y, melyeket a következőképpen kapjuk meg:

$$m_x = \iint_R x \cdot \varrho(x, y)\, dR$$

$$m_y = \iint_R y \cdot \varrho(x, y)\, dR$$

Ezután a tömegközéppontok koordinátái

$$M_x = \frac{m_x}{m} \qquad M_y = \frac{m_y}{m}.$$

Példa: Egy vaslemez tömegközéppontjának meghatározása

Feladat: Adott egy háromszög alakú lemez. Csúcsontjainak koordinátái: $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(0, 5)$. Feltesszük, hogy a lemez sűrűsége az y koordinátával lineárisan arányos.

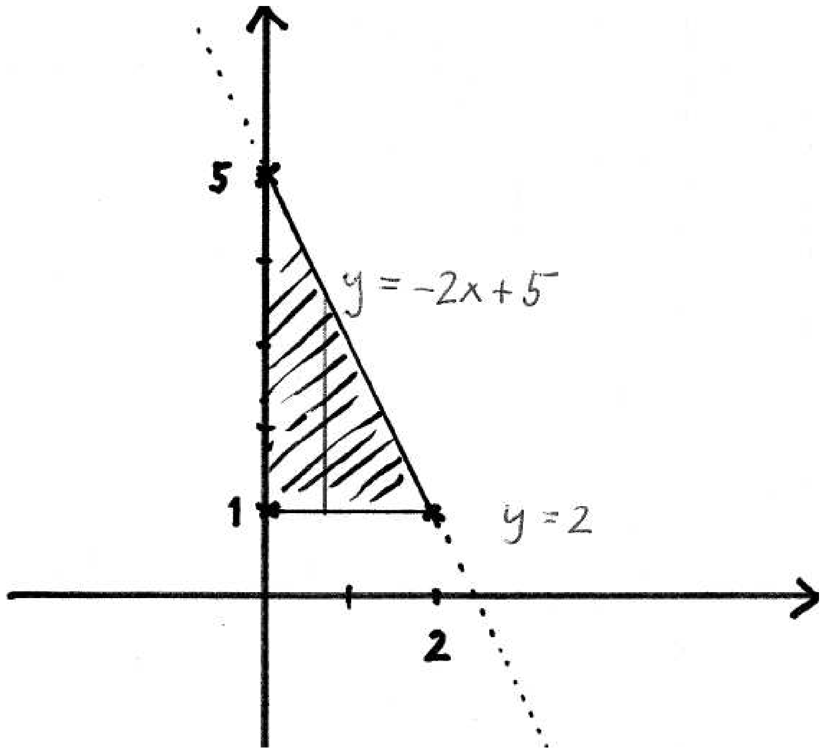
Határozzuk meg a lemez tömegközéppontját!

Megoldás: Először írjuk fel a sűrűségfüggvényt:

$$\varrho(x, y) = k \cdot y$$

ahol k egy konstans. Ezután a tömeg képlete:

$$m = \iint\limits_R \varrho(x, y)\, dR = \iint\limits_R ky\, dR = k \cdot \iint\limits_R y\, dR$$



A háromszöget lerajzolva látható, hogy azt a legegyszerűbben egy x szerinti normáltartományként foghatjuk fel.

$$R = \{(x, y)\ :\ 0 \le x \le 2,\ 1 \le y \le -2x + 5\}$$

Az integrálás:

$$m = k \cdot \int_0^2 \int_1^{-2x+5} y\, dy\, dx =$$

$$= k \cdot \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_1^{-2x+5} dx = k \cdot \int_0^2 \frac{(-2x+5)^2 - 1}{2}\, dx = \ldots = \frac{28}{3}k$$

Az integrál kiszámításával megkaptuk a tömeget.

Az m_x és az m_y nyomatékok:

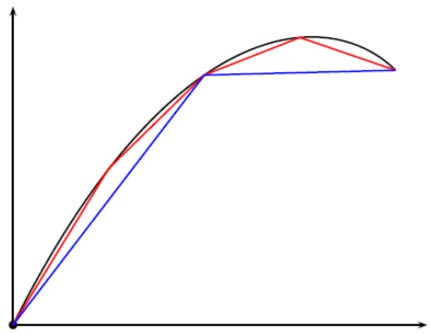
$$m_x = \iint\limits_R x \cdot ky \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2x+5} xy \, dy \, dx = \ldots = \frac{16}{3} k$$
$$m_y = \iint\limits_R y \cdot ky \, dR = k \int_0^2 \int_1^{-2x+5} y^2 \, dy \, dx = \ldots = \frac{76}{3} k$$

Ezután a tömegközéppont x és y koordinátátája:

$$M_x = \frac{m_x}{m} = \frac{4}{7} \qquad M_y = \frac{m_y}{m} = \frac{19}{7}.$$

2. A felszín meghatározása

A felszínt ugyan a három dimenzióban számoljuk, de maga az ötlet két dimenzióból származik. Két dimenzióban egy görbe ívhosszát úgy kaptuk meg, hogy közelítettük egyenes szakaszokkal:



Ahogy láttuk, minél rövidebb vonalakkal közelítettük a görbét, annál pontosabban kaptuk meg az ívhosszt. Felületszámítás esetén az elv ugyan ez marad, de itt egyenesek helyett kis paralelogrammákkal közelítjük a felületet. (Hasonlóan ahhoz, ahogy 2D-ben a görbét a görbe egyes pontjaiba húzható érintőegyenesekkel közelítettük, 3D-ben az érintősík darabkáival közelíthetünk.)

Legyen adott egy

$$f : R \longrightarrow \mathbb{R} \quad ; \quad R \subset \mathbb{R}^2$$

függvény, mely meghatározza a mérni kívánt felületet. A felület ezután a következőképpen néz ki:

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \quad | \quad (x, y) \in R\}$$

Állítás A fenti felület mértéke így számolható:

$$A(S) = \iint\limits_R \sqrt{1 + {f'_x}^2(x,y) + {f'_y}^2(x,y)}\, d(x,y)$$

Érdemes észrevenni a hasonlóságot a fenti és a Jordan-görbe ívhosszára vonatkozó képlet között. ($s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$, ha $y = f(x)$, $x \in [a,b]$).

Példa: Egységgömb felső részének a felülete

A gömbfelszín pontjai $x^2 + y^2 + y^2 = 1$, így a felső félgömb egyenlete:

$$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \qquad (x,y) \in S^2 = \{(x,y) \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

A szükséges deriváltak:

$$f'_x(x,y) = -2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$
$$f'_y(x,y) = -2y \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

A felszín meghatározásához kiszámoljuk az integrandust:

$$\sqrt{1 + {f'_x}^2(x,y) + {f'_y}^2(x,y)} = \sqrt{\frac{1 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

így

$$A(S^3) = \iint\limits_{S^2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} \cdot r\, d\theta dr =$$
$$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1 - r^2}} dr = 2\pi \cdot \left[-\sqrt{1 - r^2}\right]_0^1 = 2\pi.$$

3. Vonalintegrál

Adott egy $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^+$ függvény, ahol $R \subset \mathbb{R}^2$, továbbá adott egy $\Gamma \subset R$ Jordan-görbe. Ennek paraméteres felírása:

$$\Gamma = \{(x(t), y(t)) \mid t \in [a,b].\}$$

A feladat az, hogy meghatározzuk az alábbi felület nagyságát:

$$S = \{(x(t), y(t), z) \quad | \quad 0 \leq z \leq f(x(t), y(t)) \text{ és } t \in [a,b]\}$$

Ez az a felület, amit úgy kapunk, hogy a görbe minden (x, y) pontjára állítunk $f(x, y)$magasságú merőleges szakaszt.

Tekintsük a görbe egy felosztását!

$$a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b,$$

a görbén a megfelelő osztópontok $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots n$, ahol $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$. Ekkor a felület felszíne közelítve:

$$I \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \|(x_1, y_1) - (x_{i-1}, y_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot s(\widehat{P_{i-1}P_i}),$$

ahol a jobboldal utolsó tagjában a $\widehat{P_{i-1}P_i}$ ívdarab hossza szerepel. Ez alapján a vonalintegrál határátmenettel megkapható:

$$I = \int_\Gamma f(x, y)\; ds := \int_a^b f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Ez a definíció tetszőleges (nem csak pozitív értékű) integrálható függvényre alkalmazható.

(Folytatás a jegyzetben...)