Implicit függvény tétel három dimenzióban

Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

2015. március 25.

Motiváció: Adott a térben egy S felület, amelyet kétféle módon tekinthetünk. Egyrészt lehet egy kétváltozós függvény felülete. Ez azt jelenti, hogy van egy olyan $f : D \to \mathbb{R}$ függvény, $D \subset \mathbb{R}^2$, melyre

$$S = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}.$$

Másrészt lehet a felület egy háromáltozós függvény *szintfelülete*. Ez azt jelenti, hogy van olyan $F : R \to \mathbb{R}$ függvény, $R \subset \mathbb{R}^3$, melyre

$$S = \{(x, y, z) \in R \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Feladatunk az lesz, hogy az $F(x, y, z) = 0$ alakú implicit függvényt explicit alakban megadjuk. Ehhez adott a felületen egy előre rögzített pont (x_0, y_0, z_0), melyre tehát $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Az (x_0, y_0) pont környezetében keressük a felületet megadó függvény explicit alakját. Egy olyan $z = f(x, y)$ függvényt keresünk, melyre $F(x, y, f(x, y)) = 0$ és $f(x_0, y_0) = z_0$.

1. Tétel. *(Implicit függvény tétel* 3 *változós függvényre.) Tegyük fel, hogy az F háromváltozós függvény differenciálható az (x_0, y_0, z_0) pont egy környezetében, továbbá ebben a pontban*

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Ezen felül feltesszük, hogy $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Ekkor létezik az (x_0, y_0) síkbeli pontnak egy $U \subset \mathbb{R}^2$ környezete, és létezik egy $f : U \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, mely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- $f(x_0, y_0) = z_0$.
- $F(x, y, f(x, y)) = 0$, $\forall (x, y) \in U$.
- $F'_z(x, y, f(x, y)) \neq 0$, $\forall (x, y) \in U$.

Továbbá f differenciálható U-ban, és parciális deriváltjai így számolhatók:

$$f'_x(x, y) = -\frac{F'_x(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}, \qquad f'_y(x, y) = -\frac{F'_y(x, y, f(x, y))}{F'_z(x, y, f(x, y))}.$$