Kettős és hármas-integrálok

21. Határozzuk meg két egymásra merőleges R sugarú henger közös részének térfogatát!

22. Számítsuk ki az $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ hengerfelület, a $z = x + y + 6$ sík, és az xy tengelysík által határolt csonkahenger térfogatának mérőszámát!

23. Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület, az $x = 1$ és a $z = 0$ síkok által meghatározott test térfogatának mérőszámát!

24. Határozzuk meg az R sugarú gömb térfogatát! A számolást polárkoordinátarendszerben végezzük!

29. Számítsuk ki a következő integrált az első síknegyedben lévő egységsugarú negyedkör tartományra:

$$\iint_T \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} dT$$

30. Kiszámítandó a $z = x^2 + y^2$ hiperbolikus paraboloid, az xy tengelysík és az $x^2 + y^2 = 1$ hengerpalást által határolt test térfogatának mérőszáma.

31. Határozzuk meg az

$$\iint_T (1 - x^2 - y^2) dT$$

integrál értékét az $x^2 + y^2 \leq 9$ körtartományon!

33. Határozzuk meg az $\dfrac{x^2}{4} + y = 1$ henger, a $3x + 4y + z = 12$ sík és az xy tengelysík által meghatározott test térfogatának mérőszámát!

35. Számítsuk ki a $z = 1 - 4x^2 - y^2$ felület és az xy tengelysík által meghatározott test térfogatának mérőszámát.

36. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ felület, a $z = 0$ sík és az $(x-2)^2 + y^2 = 4$ körhenger által határolt test térfogatának mérőszámát

37. Mekkora a $z = 2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ kúp, a $z = 0$ sík és az

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

henger által határolt test térfogatának mérszáma?

38. Határozzuk meg a $2x = y^2 + 4z^2$ elliptikus paraboloid és az $x = 1$ sík által határolt test térfogatát!

39.

$$\int_0^2 \int_0^1 \int_0^3 (2x - 4y + 6z + 3)dx\ dy\ dz = ?$$

40.

$$\int_1^3 \int_1^3 \int_1^3 (x + y + z)dx\ dy\ dz = ?$$

41.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} (\frac{1}{1 + x + y + z^3})dx\ dy\ dz = ?$$

42. Határozzuk meg a

$$\iiint_V (x - 2y + 4z)dV$$

hármas integrál értékét, ha a V térfogatrészt az $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ felületek határolják!

43. Számítsuk ki az $x + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ felületek által határolt V térfogatra a

$$\iiint_V (x^2 + 2y + z^2) dV$$

integrál értékét!

44. Mekkora

$$\iiint_V (e^{x+y+z}) dV$$

értéke, ha V-t az $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = x + y$ egyenletű felületek határolják?

45 . Számítandó a

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz$$

integrál értéke ahol a V az $x^2 + y^2 = 4$ hengernek a $z = 0$ és $z = 8$ síkok közé eső része!

46 . Mennyi a

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dxdydz$$

integrál értéke, ha V az ábrán látható z temgelyű, R alapsugarú egyenes körkúp ?

47 . Számitsuk ki az $x^2 + y^2 + z^2 - 4a^2 = 0$ gömb és az $(x - a)^2 + y^2 - a^2 = 0$ henger közös részének térfogatát (Viviáni- féle test)!

48 . Számitsuk ki a

$$\iiint_V zyx^2 dV$$

integrált az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ gömb $x \geqq 0$ nyolcadára!

49 . Határozzuk meg a $z = x^2 - y^2$ felület $x \geqq 0$, $z \geqq 0$ része, a $z = 0$ és az $x = 1$ síkok által határolt homogén test sulypontjának helyzetét!

50. Számítsuk ki a $z = y^2 - x$, $x = 0$, $z = 0$ egyenletű felületek által határolt homogén test sulypontjának koordinátáit!

Írja fel az alábbi hármas integrálokat az összes lehetséges sorrendben (még 5-féleképpen):

97.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z)\, dz dy dx$$

98.

$$\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-x} f(x, y, z)\, dy dz dx$$

99. Számítsa ki az alábbi hármas integrált:

$$\iiint_E \sqrt{x^2 + z^2}\; d(x, y, z),$$

ahol E az $y = x^2 + z^2$ paraboloid $y = 4$ -ig terjedő része.

100. Számítsa ki a következő síkok által közrezárt térfogatot:

$$x + 2y + z = 2 \qquad (1)$$
$$x = 2y \qquad (2)$$
$$x = 0 \qquad (3)$$
$$z = 0 \qquad (4)$$

101. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = 12$ henger, a $3x + 4y + z = 12$ sík és a $z = 0$ sík által határolt henger térfogatát.

102. Határozzuk meg a $z = x^2 + y^2$ paraboloid és az $x^2 + y^2 = 9$ henger $z \geq 0$ részben lévő közös részének téfogatát.

103. Határozzuk meg a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúp $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$ körgyűrű fölötti részének térfogatát.

104. Határozzuk meg a $z = 10 - 3x^2 - 3y^2$ paraboloid és a $z = 4$ sík közti térfogatot.

Megoldások

21. $I = \dfrac{16}{3}R^3$ (A hengerek tengelyei egy síkban vannak! A kérdéses térfogat felét kapjuk ha az $x^2 + z^2 = R^2$ függvényt az $x^2 + y^2 = R^2$ körtartományon integráljuk.)

22. $I = 36\pi$ (A térfogat mérőszámát kapjuk ha a $z = x + y + 6$ függvényt az $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ ellipszis tartományon integráljuk.)

23. $I = \dfrac{1}{3}$ (A $z = 0$ sík, az xy tengelysík, ezt a felületet az $x^2 - y^2 = 0$ egyenespárban metszi. Mivel $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 0$, kapjuk az $y = \pm x$ egyeneseket.)

24. Polárkoordinátákat vezetünk be: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$ ekkor $dT = r \cdot dr d\varphi$. Ha a $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{R^2 - r^2}$ függvényt a $0 \leq r \leq R$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ határok között integráljuk a gömb térfogatának felét kapjuk.

29. $I = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0,6506$

30. A kiszámítandó térfogat mérőszámának negyedrészét kapjuk ha - polárkoordinátákra áttérve - a $0 \leq r \leq 1$ és $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \frac{\pi}{4}$ határok között inegrálunk. I=1.

31. $I = -31,5\pi = -98,96$

33. (Integrálandó a $z = 12 - 3x - 4y$ függvény az $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ tartományon!)
Helyettesítsünk $x = 2r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$-t, ekkor

$$dxdy = 2rdrd\varphi$$

, a határok $0 \leq r \leq 1$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Végeredmény: $I = 24\pi$

34. $I = \dfrac{1}{60}(4 - \sqrt{2}) = 0,043$

35. $I = \frac{\pi}{4} = 0,7854$

36. Polárkoordinátákban az integrálási határok: $0 \le r \le 4\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, I = 24\pi$

37. $I = \frac{\pi}{2} - \frac{8}{9} = 0,6819$

38. $I = \frac{\pi}{2}$

39. 36

40. 48

99. 1.megoldás: (z szerinti normáltartományként) Az integrálási tartomány (x, y) síkbeli vetülete megegyezik azzal a metszettel, ahol $z \equiv 0$. Tehát

$$S = \left\{(x, y) : -2 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 4\right\}$$

így R normáltartomány:

$$R = \left\{(x, y, z) :\ (x, y) \in S,\ -\sqrt{y - x^2} \le z \le \sqrt{y - x^2}\right\}$$

ekkor az integrál

$$\iiint\limits_R \sqrt{x^2 + z^2}\ d(x, y, z) = \iint\limits_S \left(\int\limits_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2 + z^2} dz \right)\ d(x, y)$$

Ennek kiszámítása igen hosszadalmas lenne.

2.megoldás: (y szerinti normáltartományként) Az (x, z) síkbeli vetületet jelölje T:

$$T = \{(x, z) :\ x^2 + z^2 \le 4\}.$$

Ezért

$$R = \left\{(x, y, z) :\ (x, y) \in T,\ x^2 + z^2 \le y \le 4\right\}.$$

Tehát az integrál:

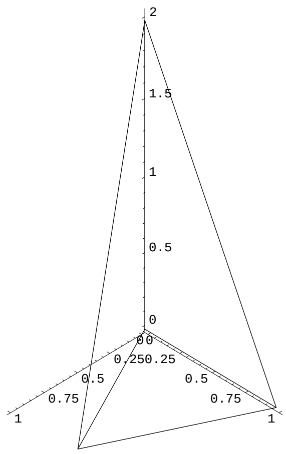
$$I = \iint\limits_T \left(\int\limits_{x^2+z^2}^{4} \sqrt{x^2 + z^2} dy \right) d(x, z) = \iint\limits_T \left(4 - x^2 - z^2\right)\sqrt{x^2 + z^2}\ d(x, z)$$

Ezt úgy számolhatjuk ki, ha az (x, z) síkban polárkoordinátákra áttérünk

$$I = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4 - r^2\right) r^2 d\theta dr = \frac{128\pi}{15}$$

ahol a jobboldali r^2-et a Jacobi-determináns r-jével való szorzás miatt kapunk

100. Legyen $S \in R^3$ a fenti síkok által közrezárt térrész. Legyen $R \in R^2$ ennek vetülete az $(x.y)$ síkon Tekintsük a következő ábrákat: S és R:



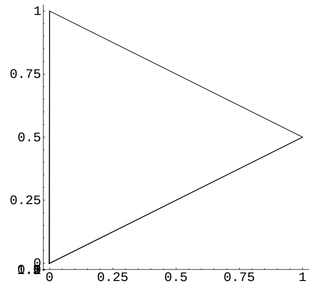
Az (1) és (4) síkok metszete az (x, y) síkban:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 2 \\ z & = & 0 \\ \hline x + 2y & = & 0 \end{array}$$

Az (1) sík a z tengelyt a $z = 2$ pontban metszi. Az $x = 2y$ sík merőleges az (x, y) síkra, így R:

Tehát a keresett térfogat:

$$\iint\limits_R (2 - x - 2y)\, d(x, y) = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y)\, dydx = \frac{1}{3}$$



1. ábra. Felülnézet(S), ahol a felső függvény $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x$, az alsó $g(x) = \frac{1}{2}x$

101. A következő integrált nézzük:

$$\int\int_R \int_0^{12-3x-4y} 1dzd(x,y) = \int\int_R (12-3x-4y)\,d(x,y)$$

körpolár-ba átírva

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{12}} (12 - 3rcos\varphi - 4rsin\varphi)\,rdrd\varphi = 144\pi$$

102. A következő integrált nézzük, s átírjuk körpolárba:

$$\int\int_R \int_0^{x^2+y^2} 1dzd(x,y) = \int_0^{2\pi}\int_0^{3} \left((rcos\varphi)^2 + (rsin\varphi)^2\right) rdrd\varphi = \frac{81}{2}\pi$$

103. A következő integrált nézzük:
A nagyobbik sugarú körvetületből kivonjuk a kisebbiket, így kapjuk meg a körgyűrűt, átírva körpolárba:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{5} \sqrt{(rcos\varphi)^2 + (rsin\varphi)^2} rdrd\varphi - \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \sqrt{(rcos\varphi)^2 + (rsin\varphi)^2} rdrd\varphi = 78\pi$$

104. A következő integrált nézzük:
Átírjuk körpolárba, és a $4 = 10 - 3x^2 - 3y^2$ kör intervallumán tekintjük:
$-6 = -3x^2 - 3y^2$
azaz
$x^2 + y^2 = 2$

$$\int\int_R \int_0^{10-3x^2-3y^2} 1dzdx,y = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(10 - (rcos\varphi)^2 - (rsin\varphi)^2\right) rdrd\varphi = 18\pi$$