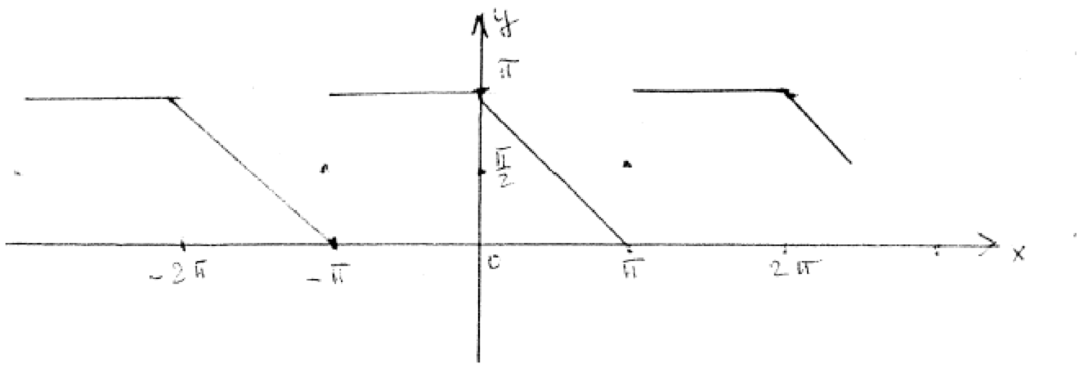
$\boxed{\textbf{F.1}}$ Ismeretes, hogy a 2π szerint periodikus $y = f(x)$ függvény:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos kx + b_k \cdot \sin kx)$$

Fourier-sorában szereplő együtthatókat az

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)dx \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} \cos kxdx \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} \sin kxdx \end{aligned}$$

képletek segítségevel számíthatjuk ki.
Feladatunkban adott függvényt az ábra szemlélteti.



A függvény egy teljes periódusa pl. a $(-\pi, \pi)$ számközben.

$$f(x) = \begin{cases} \pi & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ \pi - x & \text{ha } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

Az együtthatókat két integrál összegeként kapjuk.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \pi dx + \int_0^{\pi} (\pi - x)dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\Big[\pi x\Big]_{-\pi}^{0} + \left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{3}{2}\pi. \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0} \pi \cos kxdx + \int_0^{\pi} (\pi - x)\cos kxdx\right\} \end{aligned}$$

A második integrálban a parciális integrálás szabályát alkalmazzuk.

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\pi\frac{\sin kx}{k}\right]_0^\pi + \left[(\pi - x)\frac{\sin kx}{k}dx\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin kx}{k}dx\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos kx}{k^2}\right]_0^\pi = -\frac{\cos k\pi - 1}{\pi k^2}
\end{aligned}$$

Mivel $\cos k\pi = (-1)^k$,

$$a_k = \frac{1-(-1)^k}{k^2} = \begin{cases} \frac{2}{\pi k^2} & \text{ha } k = 2n+1 \\ 0 & \text{ha } k = 2n \end{cases}$$

Hasonló módon:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^0 \pi \sin kx dx + \int_0^\pi (\pi - x)\sin kx dx\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\pi\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^0 + \left[-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos kx}{k}dx\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{k} - \frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{\pi}{k} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^\pi\right\} = \frac{1}{k}(-1)^k.
\end{aligned}$$

A függvény Fourier-sora:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\cos x - \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{2}{\pi 3^2}\cos 3x + \\
&\quad -\frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{2}{\pi 5^2}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x + \dots
\end{aligned}$$

Rendezzük át a sort:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{3}{4}\pi + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \dots\right) + \\
&= \left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \dots\right)
\end{aligned}$$

A Fourier-sor az $f(x)$ folytonossági helyein előállítja a függvényt. Helyettesíthetünk tehát a sorba $x = 0$-t. A függvény a zérus helyen π értékű, $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$, tehát

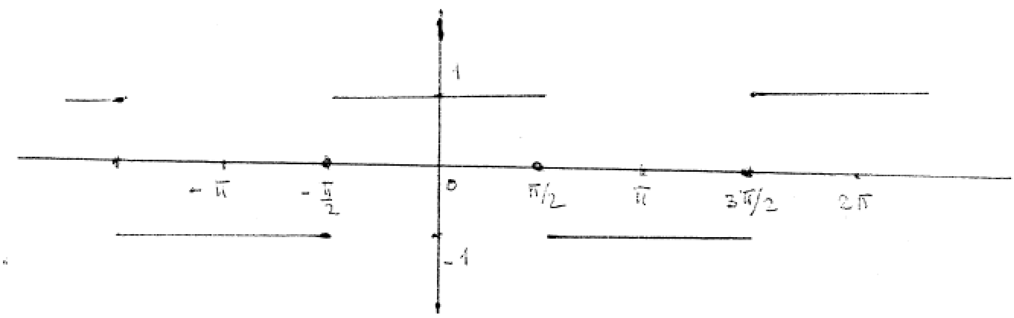
$$\begin{aligned}
\pi &= \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right), \text{ azaz} \\
1 &+ \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

Fourier sorfejtés célszerű alkalmazásával számos számsor összegét meg lehet határozni.

F.2 Ábrázolva az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{ha } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ f(x + 2k\pi) & \end{cases}$$

függvényt, látható, hogy a "görbe" az y tengelyre szimmetrikus, azaz a függvény páros.



Ekkor a Fourier-sor is csak páros függvényekből tevődik össze, azaz $b_k = 0$.
A koszinuszos tagok együtthatói, valamint a konstans kiszámításánál elegendő a félperiódusra integrálni, s az eredmény kétszeresét venni. Így:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx. \\
a_0 &= \frac{2}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi/2} dx - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \right\} = 0 \\
a_k &= \frac{2}{\pi}\left\{ \int_0^{\pi/2} \cos kx dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos kx dx \right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{ \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} \right\} = \frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Figyelembevéve a szinuszfüggvény értékeit:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2n \\ \frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4n+1 \\ -\frac{4}{k\pi} & \text{ha } k = 4n+3 \end{cases}$$

A keresett Fourier-sor:

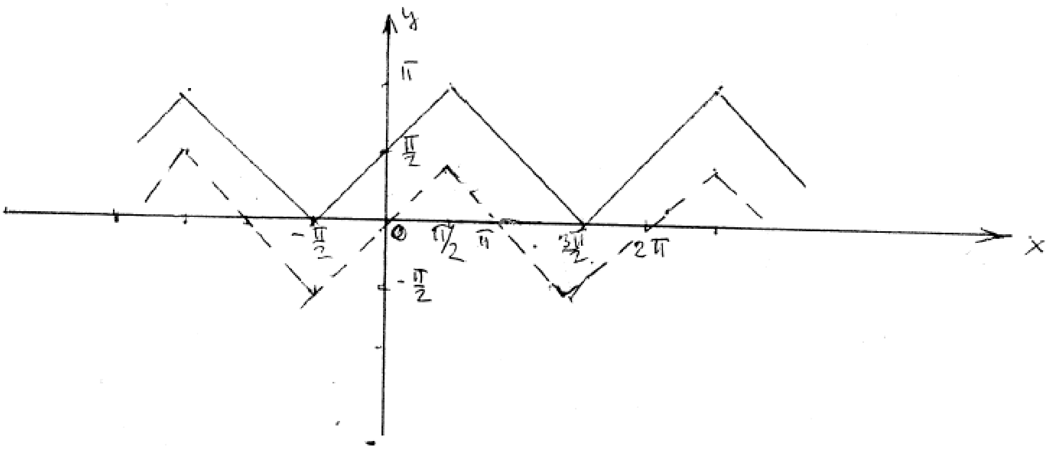
$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \dots\right]$$

A sorba x=0-t behelyettesítve:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right)$$

A keresett sorösszeg: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$.

F.3 A függvény se nem páros, se nem páratlan, ennek ellenére egyszerű lesz az együtthatók kiszámítása, ha észrevesszük, hogy $f(x)$-szet az y tengely mentén $\frac{\pi}{2}$-vel negatív irányba eltolva páratlan függvényt kapunk.



Jelöljük ezt az új függvényt $g(x)$-el. A kettő között a kapcsolat $f(x) = g(x) + \frac{\pi}{2}$.
Ha az $f(x)$ függvénynél a_0-t kiszámítjuk, az előbbiek alapján $\frac{\pi}{2}$-t kell kapni eredményül.
Ez könnyen ellenőrizhető. Számítsuk ki tehát először $g(x)$ Fourier-sorát:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \\ g(x + 2k\pi) & \end{cases}$$

g(x) páratlan függvény, tehát $a_0 = a_k = 0$, és a b_k együtthatókat a

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx dx$$

összefüggés alapján számolhatjuk.

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi/2} x\sin kx dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin kx dx\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x\frac{\cos kx}{k}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\frac{\cos kx}{k}dx + \left[-(\pi - x)\frac{\cos kx}{k}\right]_{\pi/2}^{\pi} - \right. \\
&\quad \left. - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k}\cos k\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi/2} - \left[\frac{\sin kx}{k^2}\right]_{\pi/2}^{\pi}\right\} = \\
&= \frac{2}{k^2\pi}2\sin k\frac{\pi}{2} = \frac{4}{k^2\pi}\sin k\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned}
\sin k\frac{\pi}{2} &= \begin{cases} 0 & \text{ha } k = 2n \\ (-1)^n & \text{ha } k = 2n+1 \end{cases} \\
b_{2n+1} &= \frac{4}{\pi(2n+1)^2}(-1)^n
\end{aligned}$$

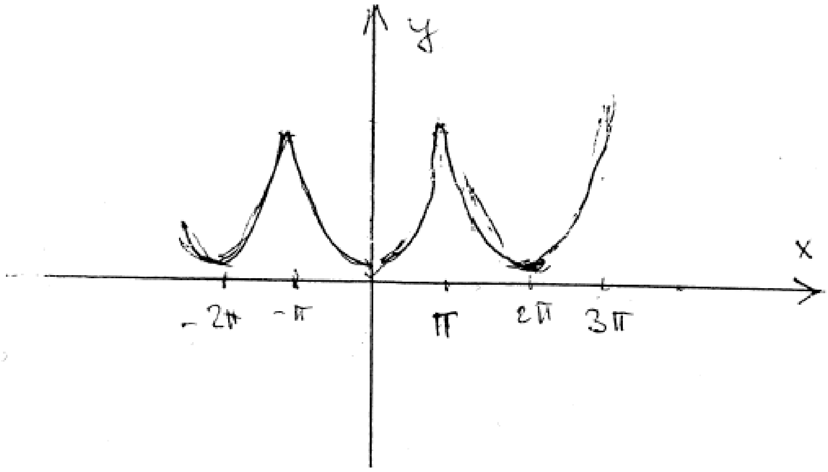
A $g(x)$ függvény Fourier-sora tehát a következő:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x = \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \dots\right)
\end{aligned}$$

Végül az $f(x)$ Fourier-sora:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin(2k+1)x = \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{9}\sin 3x + \frac{1}{25}\sin 5x - \dots\right).
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{F.4}}$ Mint az ábrából látható, a függvény páros.



Ezért $b_k = 0$.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh x dx = \frac{1}{\pi}\Big[\sinh x\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\sinh\pi \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cosh x \cos kx dx \end{aligned}$$

Az integrálást a parciális integrálás módszerével végeztük: kétszer számítjuk ki az integrál értékét: ellenkező "szereposztásban".

$$\int \underbrace{\cosh x}_{u} \underbrace{\cos kx}_{v'} dx = \cosh x \frac{\sinh x}{k} - \frac{1}{k}\int \sinh x \sin kx dx$$

$$\int \underbrace{\cosh x}_{v'} \underbrace{\cos kx}_{u} dx = \sinh x \cos kx + k\int \sinh x \sin kx dx$$

Az első egyenletet k^2-tel szorozva és a másodikat hozzáadva a jobboldalon lévő integrálok összege zérus lesz, tehát

$$(k^2+1)\int \cosh x \cos kx dx = k \cosh x \sin kx + \sinh x \cos kx$$

A keresett határozott integrál így:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2+1}\Big[k\cosh x \sin kx + \sinh x \cos kx\Big]_0^{\pi} = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^2+1}\sinh\pi\cos k\pi \end{aligned}$$

Mivel $\cos k\pi = (-1)^k$:

$$a_k = \frac{\sinh \pi}{\pi} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$$

A keresett Fourier-sor:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1} \cos kx \right) = \\ &= \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{5} \cos 2x - \frac{1}{10} \cos 3x + \frac{\cos 4x}{17} - \dots \right). \end{aligned}$$