

Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

2016. február 18.

Egy példa

Legyen

$$f(x) = (x - \pi)^2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$

A függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztjük a valós számokra. Határozzuk meg Fourier sorát.

Mivel f páros, így csak cosinus-os tagok szerepelnek.

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Az együtthatók:

$$\begin{aligned} a_0 \pi &= \int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} - \pi \left[x^2 \right]_0^{2\pi} + 2\pi^3 = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + 2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^3 \end{aligned}$$

$$a_k \pi = \int_0^{2\pi} (x - \pi)^2 \cos(kx) dx = \frac{1}{k} \left[(x - \pi)^2 \sin(kx) \right]_0^{2\pi} - \frac{2}{k} \int_0^{2\pi} (x - \pi) \sin(kx) dx = (*)$$

A fenti integrálban helyettesítéses integrálást végeztünk:

$$\begin{aligned} u(x) &= (x - \pi)^2 & u'(x) &= 2(x - \pi) \\ v'(x) &= \cos(kx) & v(x) &= \frac{1}{k} \sin(kx) \end{aligned}$$

A jobboldal első tagja 0. Újabb parciális integrálással folytatva (HF):

$$(*) = \frac{2}{k} \left[\frac{1}{k} \cos(kx)(x - \pi) \right]_0^{2\pi} + \frac{2}{k} \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx$$

A jobboldal második tagja 0. A behelyettesítést elvégezve:

$$\frac{2}{k} \left[\frac{1}{k} \cos(kx)(x - \pi) \right]_0^{2\pi} = \frac{2}{k^2} \pi (1 - (-1)) = \frac{4\pi}{k^2}.$$

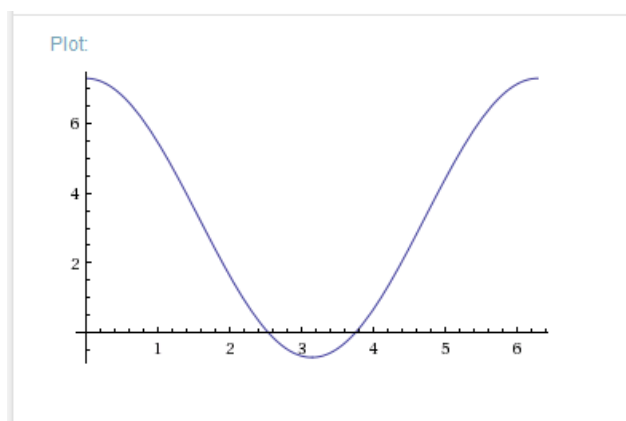
Ez alapján a Fourier sor:

$$f \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

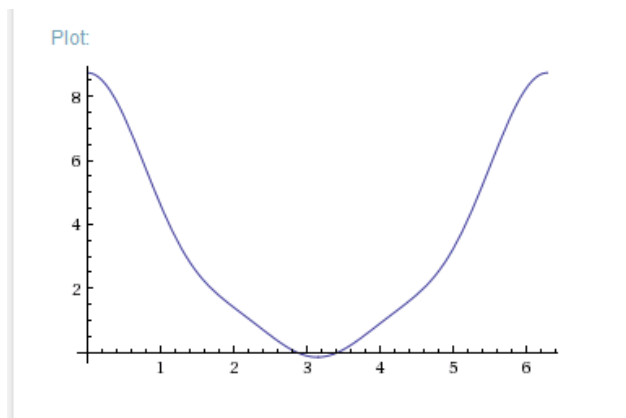
Megjegyzés. A Fourier sor egyenletesen konvergens. (*Miért?*)

Tudjuk, hogy a Fourier sor **előállítja** a függvényt:

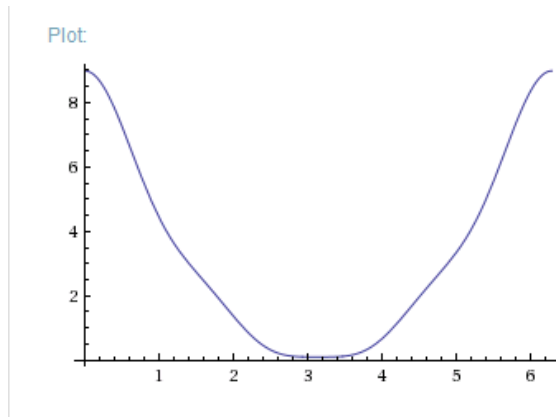
$$(x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi.$$



1. ábra. Fourier polinom közelítés: 2 tag



2. ábra. Fourier polinom közelítés: 3 tag



3. ábra. Fourier polinom közelítés: 4 tag

A fenti összefüggést alkalmazzuk $x = 0$ -ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Deriválás.

Láttuk, hogy a Fourier sor egyenletesen konvergens módon állítja elő az $(x - \pi)^2$ függvényt a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

$$(x - \pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (1)$$

A fenti f függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztettük az egész számsíakra. A függvény mindenütt differenciálható, kivéve az $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ pontokat. Ezekben a pontokban f' -nek szakadása van.

A fenti (1) egyenlet tagonkénti deriválásával a $(0, 2\pi)$ intervallumon felírhatjuk:

$$f'(x) = 2(x - \pi) = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k \sin(kx)}{k^2}, \quad 0 < x < 2\pi,$$

azaz

$$g(x) = \pi - x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, \quad 0 < x < 2\pi$$

A $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}$ Fourier sor összege a szakadási helyeken f' bal- és jobb oldali határértékének átlaga lesz:

$$g(x) = \begin{cases} \pi - x & 0 < x < 2\pi \\ 0 & x = 0, 2\pi \end{cases}$$

Integrálás.

Vegyük az (1) egyenlet integrálját egy $[0, x]$ szakaszon. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x - \pi)^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi. \quad (2)$$

A fenti egyenletbe $x = \pi/2$ -t behelyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{-\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{6} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k^3}$$

A jobboldalon $\sin(k\pi/2) = 1, 0, -1, 0$ értéket vesz fel, ciklikusan. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi^3}{8} = 4 \left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \dots \right)$$