Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

Egy példa

Legyen
$$f(x) = (x-\pi)^2, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$
A függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztjük a valós számokra. Határozzuk meg Fourier sorát.

Mivel f páros, így csak cosinus-os tagok szerepelnek.
$$f \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$
Az együtthatók:
$$a_0\,\pi = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2)dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} - \pi\left[x^2\right]_0^{2\pi} + 2\pi^3 = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + 2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_k\,\pi = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\left[(x-\pi)^2 \sin(kx)\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin(kx)dx = (*)$$
A fenti integrálban helyettesítéses integrálást végeztünk:

$$u(x) = (x-\pi)^2 \qquad\qquad u'(x) = 2(x-\pi)$$
$$v'(x) = \cos(kx) \qquad\qquad v(x) = \tfrac{1}{k}\sin(kx)$$

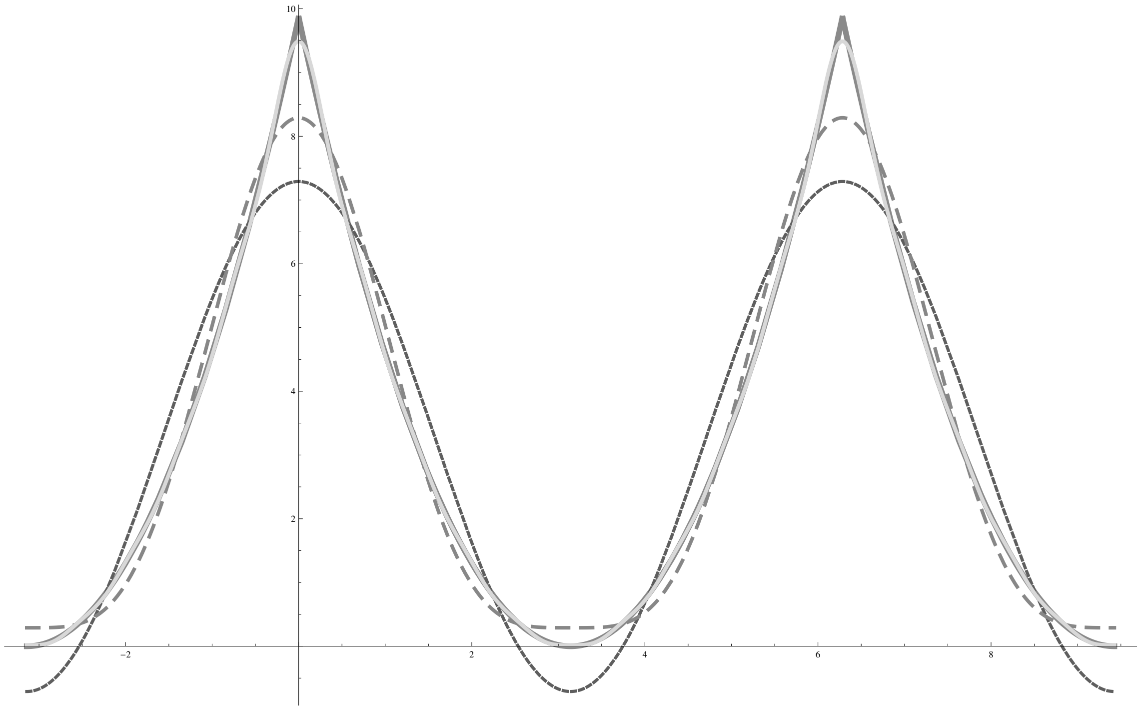
A jobboldal első tagja 0. Újabb parciális integrálással folytatva (HF):
$$(*) = \frac{2}{k}\left[\frac{1}{k}\cos(kx)(x-\pi)\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{k}\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx$$
A jobboldal második tagja 0. A behelyettesítést elvégezve:
$$\frac{2}{k}\left[\frac{1}{k}\cos(kx)(x-\pi)\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{k^2}\,\pi\Big(1-(-1)\Big) = \frac{4\pi}{k^2}.$$

Ez alapján a Fourier sor:

$$f \quad \sim \quad \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

A Fourier sor egyenletesen konvergens (MIÉRT?), így **elő állítja** a függvényt:

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$



A fenti összefüggést alkalmazzuk $x = 0$-ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A hatványsor a konvergenciatartyomány **belsejében** tagonként deriválható illetve tagonként integrálható. Mit kapunk?

Deriválás.

Láttuk, hogy a Fourier sor egyenletesen konvergens módon állítja elő a függvényt a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \qquad 0 \le x \le 2\pi. \tag{1}$$

Az f függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztettük az egész számegyenesre. A függvény mindenütt differenciálható, kivéve az $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ pontokat. Ezekben a pontokban f'-nek szakadása van.
A fenti sor a konvergencia tartomány **belsejében** tagonként differenciálható. Így a fenti (1) egyenlet deriválásával egy $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ intervallumon felírhatjuk:

$$2(x-\pi) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k\sin(kx)}{k^2}, \qquad \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon,$$

azaz

$$\pi - x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, \qquad \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon.$$

Ez a sor az egész $[0, 2\pi]$ intervallumon már nem egyenletesen konvergens. Sőt, $x = 0$-ban és $x = 2\pi$-ben az egyenlőseg nem áll fenn.
A Fourier sor összege a szakadási helyeken f' bal- és jobb oldali határértékének átlaga lesz, valóban.

Integrálás.

Vegyük az (1) egyenlet integrálját egy $[0, x]$ szakaszon. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x-\pi)^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^3}, \qquad 0 \le x \le 2\pi. \tag{2}$$

A fenti egyenletbe $x = \pi/2$-t behelyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{-\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{6} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi/2)}{k^3}$$

A jobboldalon $\sin(k\pi/2) = 1, 0, -1, 0$ értéket vesz fel, ciklikusan. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi^3}{8} = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + ...\right)$$

Szorgalmi HF: A fenti összefüggések segítségével határozzuk meg a $\zeta(k)$ függvény értékeit $k = 2, 4, 6$ esetben.

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}, \qquad k > 1.$$