Kiegészítés az Analizis II. előadáshoz

2010. február 18.

Példa. (Folytatás.) *Deriválás.*

Láttuk, hogy a Fourier sor egyenletesen konvergens módon állítja elő a függvényt a $[0, 2\pi]$ intervallumban:

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \qquad 0 \le x \le 2\pi. \tag{1}$$

Az f függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztettük az egész számegyenesre. A függvény mindenütt differenciálható, kivéve az $x = 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ pontokat. Ezekben a pontokban f'-nek szakadása van.

A fenti sor a konvergencia tartomány **belsejében** tagonként differenciálható. Így a fenti (1) egyenlet deriválásával egy $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$ intervallumon felírhatjuk:

$$2(x-\pi) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-k\sin(kx)}{k^2}, \qquad \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon,$$

azaz

$$\pi - x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k}, \qquad \varepsilon < x < 2\pi - \varepsilon.$$

Ez a sor az egész $[0, 2\pi]$ intervallumon már nem egyenletesen konvergens. Sőt, $x = 0$-ban és $x = 2\pi$-ben az egyenlőseg nem áll fenn.

A Fourier sor összege a szakadási helyeken f' bal- és jobb oldali határértékének átlaga lesz, valóban.

Integrálás. (Ez már előadáson nem szerepelt, szorgalmi HF.)

Vegyük az (1) egyenlet integrálját egy $[0, x]$ szakaszon. Azt kapjuk, hogy

$$\frac{(x-\pi)^3}{3} - \frac{-\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}x + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k^3}, \qquad 0 \leq x \leq 2\pi. \tag{2}$$

A fenti egyenletbe $x = \pi/2$-t behelyettesítve ezt kapjuk:

$$\frac{-\pi^3}{24} + \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^3}{6} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(k\pi/2)}{k^3}$$

A jobboldalon $\sin(k\pi/2) = 1, 0, -1, 0$ értéket vesz fel, ciklikusan. Így azt kapjuk, hogy

$$\frac{\pi^3}{8} = 4\left(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + ...\right)$$

Szorgalmi HF: A fenti összefüggések segítségével határozzuk meg a $\zeta(k)$ függvény értékeit $k = 2, 4, 6$ esetben.

$$\zeta(k) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}, \qquad k > 1.$$