Kiegészítés az Analizis II. előadáshoz

2010. február 15

Példa. Legyen
$$f(x) = (x-\pi)^2, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$
A függvényt 2π szerint periodikusan kiterjesztjük a valós számokra. Határozzuk meg Fourier sorát.

Mivel f páros, így csak cosinus-os tagok szerepelnek.
$$f \quad \sim \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx).$$

Az együtthatók:
$$a_0\,\pi = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 dx = \int_0^{2\pi} (x^2 - 2\pi x + \pi^2)dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{2\pi} - \pi\left[x^2\right]_0^{2\pi} + 2\pi^3 = \frac{8\pi^3}{3} - 4\pi^3 + 2\pi^3 = \frac{2}{3}\pi^3$$

$$a_k\,\pi = \int_0^{2\pi} (x-\pi)^2 \cos(kx)dx = \frac{1}{k}\left[(x-\pi)^2 \sin(kx)\right]_0^{2\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{2\pi} (x-\pi)\sin(kx)dx = (*)$$

A fenti integrálban helyettesítéses integrálást végeztünk:

$$u(x) = (x-\pi)^2 \qquad\qquad u'(x) = 2(x-\pi)$$
$$v'(x) = \cos(kx) \qquad\qquad v(x) = \tfrac{1}{k}\sin(kx)$$

A jobboldal első tagja 0. Újabb parciális integrálással folytatva (HF):
$$(*) = \frac{2}{k}\left[\frac{1}{k}\cos(kx)(x-\pi)\right]_0^{2\pi} + \frac{2}{k}\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} \cos(kx)dx$$

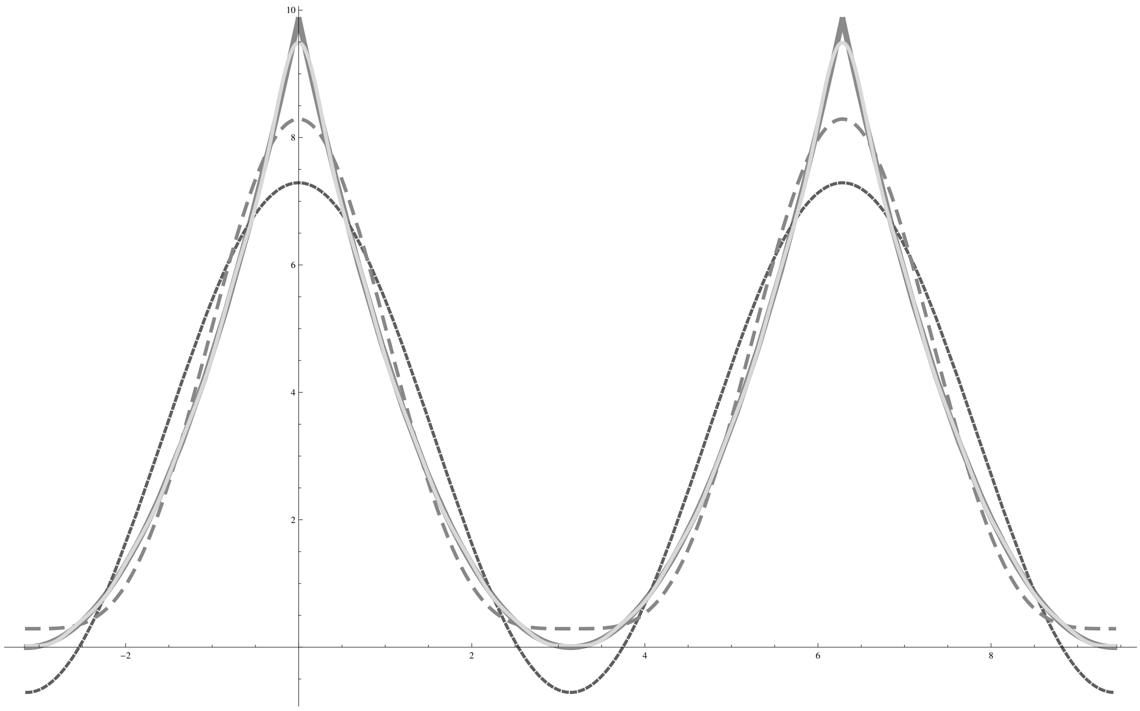
A jobboldal második tagja 0. A behelyettesítést elvégezve:
$$\frac{2}{k}\left[\frac{1}{k}\cos(kx)(x-\pi)\right]_0^{2\pi} = \frac{2}{k^2}\,\pi\Big(1-(-1)\Big) = \frac{4\pi}{k^2}.$$

Ez alapján a Fourier sor:

$$f \quad \sim \quad \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

A Fourier sor egyenletesen konvergens (MIÉRT?), így **elő állítja** a függvényt:

$$(x-\pi)^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}, \qquad 0 \le x \le 2\pi.$$



A fenti összefüggést alkalmazzuk $x = 0$-ra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2},$$

ahonnan átrendezéssel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A hatványsor a konvergenciatartyomány **belsejében** tagonként deriválható illetve tagonként integrálható. Mit kapunk?

Folytatás a következő órán.