2. FEJEZET

Fourier-sorok

2.01.° Irjuk fel az alábbi függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} \pi; & \text{ha } -\pi < x \le 0 \\ \pi - x, & \text{ha } 0 < x < \pi \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = (2k+1)\pi \qquad (k=0,\pm1,\pm2,\dots) \\ f(x+2k\pi) & \end{cases}$$

A felírt sor segítségével számítsuk ki az

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

számsor összegét!

2.02.° Határozzuk meg a következő függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -1, & \text{ha } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ 0, & \text{ha } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad (k=0,\pm1\pm2,\dots) \end{cases}$$

Számítsuk ki az

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots$$

sor összegét!

2.03.° Határozzuk meg a következő függvény Fourier-sorát:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{\pi}{2}, & \text{a } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \text{ számközben} \\ \frac{3\pi}{2} - x, & \text{a } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \text{ számközben} \end{cases}$$

egyébként a függvény 2π szerint periódikus, vagyis

$$f(x) = f(x + k2\pi) \qquad (k=0,\pm1\pm2,\dots).$$

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát!

2.4.$^{\circ}$ $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{ch}x$, a $-\Pi \le x \le \Pi$ számközben és

$f(x) = f(x + k2\Pi)$.

2.05.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Pi}{2} - x, \text{ a } 0 < x \le \frac{\Pi}{2} & \text{számközben} \\ x - \frac{\Pi}{2}, \text{ a } \frac{\Pi}{2} \le x < \Pi & \text{"} \\ x - \frac{3\Pi}{2}, \text{ a } \Pi < x \le \frac{3\Pi}{2} & \text{"} \\ \frac{3\Pi}{2} - x, \text{ a } \frac{3\Pi}{2} \le x < 2\Pi & \text{"} \\ 0, \text{ az } x = k\Pi \text{ helyeken } (k=0\ \pm 1;\ \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$f(x) = f(x + k2\Pi)$

2.06.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\frac{\Pi}{3} \le x \le \frac{\Pi}{3} \\ \frac{\Pi}{3}, & \text{ha } \frac{\Pi}{3} \le x \le \frac{2\Pi}{3} \\ \Pi - x, & \text{ha } \frac{2\Pi}{3} \le x \le \frac{4\Pi}{3} \\ -\frac{\Pi}{3}, & \text{ha } \frac{4\Pi}{3} \le x \le \frac{5\Pi}{3} \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2k\pi)$

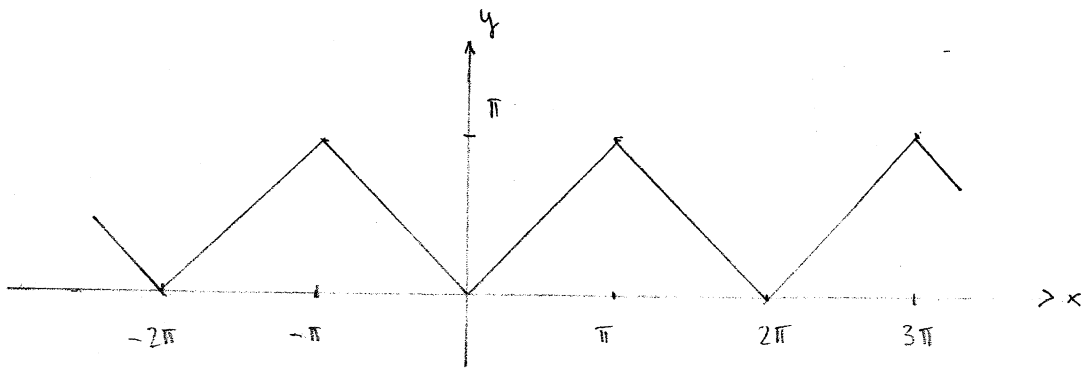
2.07.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{\Pi}{2} \\ \frac{\Pi}{2}, & \text{ha } \frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{3\Pi}{2} \\ 2\Pi - x, & \text{ha } \frac{3\Pi}{2} \le x \le 2\Pi \end{cases}$$

$f(x) = f(x + 2k\pi)$

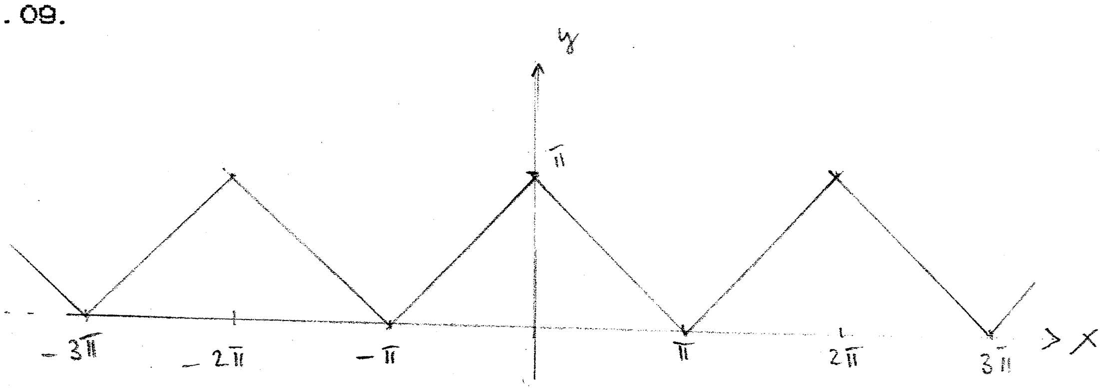
Határozzuk meg a következő példákban görbéikkel adott függvények Fourier-sorát!

2.08.



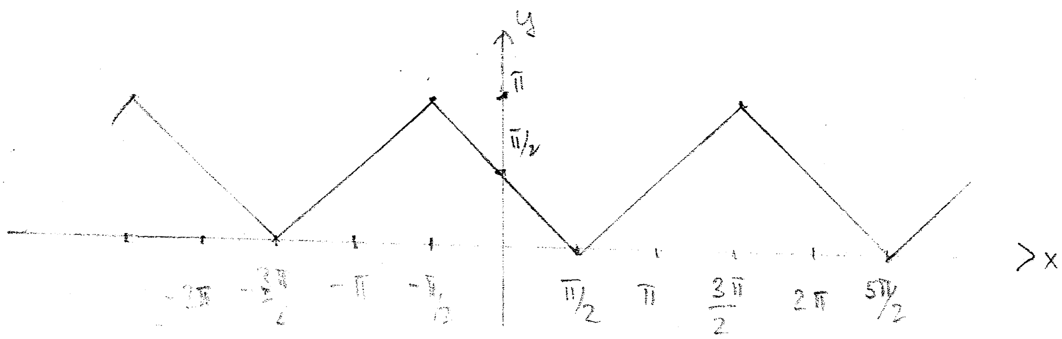
2.1. ábra

2.09.



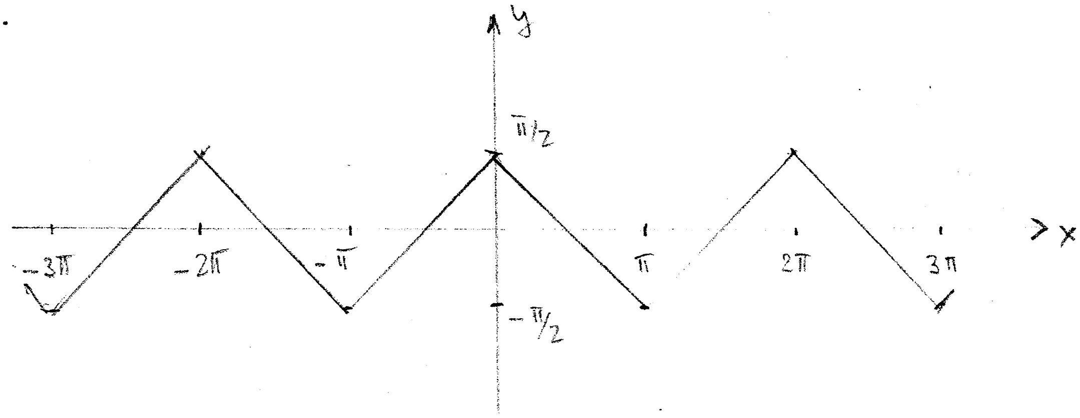
2.2. ábra

2.10.



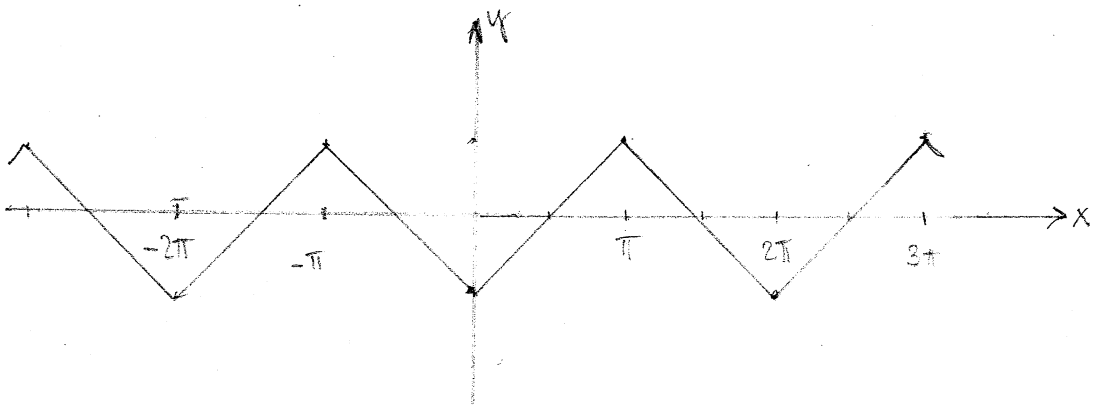
2.3. ábra

2.11.



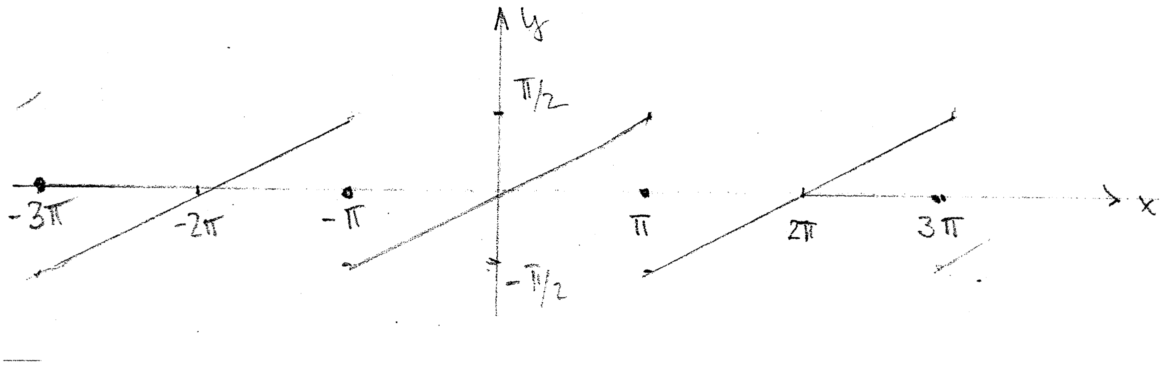
2.4. ábra

2.12.



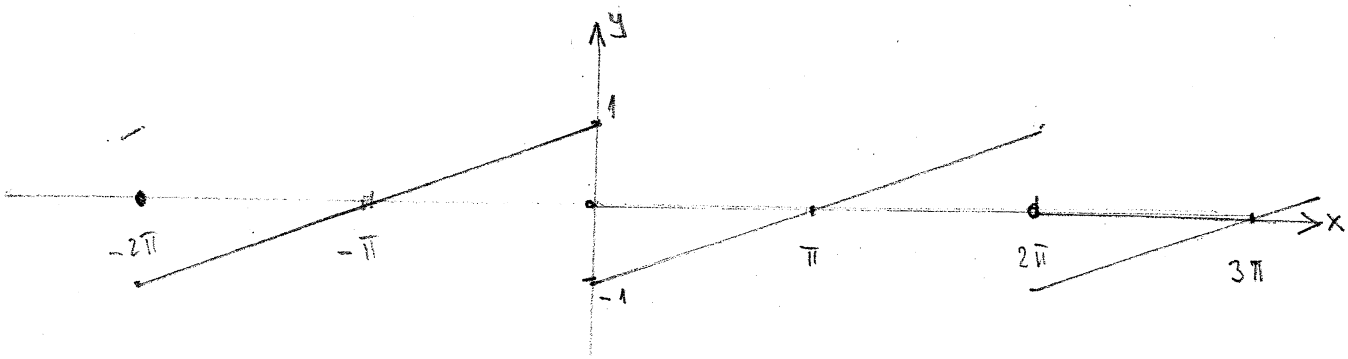
2.5. ábra

2.13.



2.6. ábra

2.14.



2.7. ábra

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát.

2.15.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{4} - \frac{x}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2.16.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{x}{2} - \frac{3\pi}{4}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.17.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{ha } -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ -x, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 0, x = (2k+1)\pi & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.18.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\pi < x \le -\frac{\pi}{2} \\ x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k+1)\pi \ ; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2.19.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \frac{\pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.20.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} - 2x, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ 2x - \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.21.

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad -\pi \le x \le 0 \\ -x, & \text{ha} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi)$$

2.22

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{\pi}{2}, & \text{ha} \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} - x, & \text{ha} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 2k\pi).$$

2.23.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha} \quad -\Pi \le x \le \Pi \\ f(x + 2k\Pi). \end{cases}$$

f(x) Fourier-sorából számitsuk ki

a $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2}$ számsor összegét!

2.24.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{\Pi} x - 1, & \text{ha} \quad -\Pi \le x \le -\frac{\Pi}{2} \\ \cos x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{\Pi}{2} \\ \frac{2}{\Pi} x - 1, & \text{ha} \quad \frac{\Pi}{2} \le x \le \Pi \end{cases}$$

2.25. $f(x) = \sin^2 x.$

2.26. $f(x) = \cos^2 x.$

2.27.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{9} & -\Pi \le x \le \Pi \\ f(x + 2k\Pi) \end{cases}$$

2.28. $f(x) = |\sin x|$

2.29. $f(x) = |\cos x|$

2.30.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{x}{2} & 0 \le x \le 2\Pi \\ f(x + 2k\Pi). \end{cases}$$

2.31.° Fourier-sorba fejtendő a következő függvény:

$f(x) = x^2 \qquad -1 \le x \le 1$

$f(x) = f(x + 2k)$

2.32.° Felírandó a következő függvény Fourier-sora.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad -2 < x \le -1 \\ \frac{x}{2} + \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ 1, & \text{ha} \quad 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}, & \text{ha} \quad x = 4k + 2 \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 4k)$$

Határozzuk meg a következő példákban adott függvények Fourier-sorát.

2.33.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{ha} \quad 0 < x < 4 \\ 1, & \text{ha} \quad x = 4k \\ f(x + 4k) & \qquad\qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

2.34.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{ha} \quad -1 \le x \le 1 \\ f(x + 2k) \end{cases}$$

2.35.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x} - 1}{2}, & \text{ha} \quad -3 \le x \le 0 \\ \dfrac{e^{x} - 1}{2}, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + 6k).$$

2.36.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ha} \quad -\frac{\Pi}{2} < x < \frac{\Pi}{2} \\ 0, & \text{ha} \quad x = (2k + 1)\Pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + k\Pi).$$

2.37.

$$f(x) = \begin{cases} (x - 1)^2, & \text{ha} \quad 0 \le x \le 2 \\ 1, & \text{ha} \quad 2 \le x \le \Pi \end{cases}$$

$$f(x) = f(x + k\Pi).$$