Kiegészítés az Analízis II. előadáshoz

2011. április 11.

Felszín számítás. Általános eset.

(Ez a rész a Jegyzet 109. oldalához kapcsolódik. A felületekről kimerítő részletességgel lehet olvasni Courant-John könyvének II. kötetében a 421. oldaltól kezdve - akit további részletek is érdekelnek.)

Legyen $S \subset \mathbb{R}^3$ felület, melyet paraméteresen adunk meg:

$$S = \{s(u,v) \ : \ (u,v)\epsilon D\}, \qquad s(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix},$$

ahol $D \subset \mathbb{R}^2$ egy adott síbeli tartomány, tipikusan egy téglalap (esetleg egy körlap). Feltesszük, hogy a fenti $x, y, z \ : \ D \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvények folytonosan differenciálhatók.

Állítás. A fenti felület **felszíne**:

$$\iint\limits_D \|s'_u(u,v) \times s'_v(u,v)\| \ d(u,v)$$

Megjegyzés. A fenti integrálban a két parciális derivált vektoriális szorzatának hossza szerepel.

Bizonyítás helyett. Röviden jelzem a bizonyítás alapötletét. Tegyük fel, hogy D téglalap és tekintsük ennek felosztását kis téglalapokra. Egy kis téglalap oldalai Δu és Δv. A kis téglalap képének felszínét közelítjük: egyik csúcsából (P) induló érintősík megfelelő darabjával. Ez egy olyan paralelogramma lesz, melynek oldalai $s'_u(P) \cdot \Delta u$ és $s'_v(P) \cdot \Delta v$. A két vektor által kifeszített paralelogramma területének mérőszáma megegyezik a vektoriáis szorzat-vektor hosszával. A közelítő összeg határértéke lesz a fenti kettős integrál.

Példa. Az r sugarú gömb felszíne mekkora?

A gömbfelület paraméteres megadása:

$$s(u,v) = \begin{pmatrix} r\ \sin u\ \cos v \\ r\ \sin u\ \sin v \\ r\ \cos u \end{pmatrix}, \qquad u\epsilon[0,\pi],\ v\epsilon[0,2\pi].$$

Ennek parciális derváltjai:

$$s'_u(u,v) = \begin{pmatrix} r\ \cos u\ \cos v \\ r\ \cos u\ \sin v \\ -r\ \sin u \end{pmatrix}, \qquad s'_v(u,v) = \begin{pmatrix} -r\ \sin u\ \sin v \\ r\ \sin u\ \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$$

A két vektor vektroriális szorzata és annak hossza (ellenőrizzék le...)

$$s'_u(u,v) \times s'_v(u,v) = \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 u\ \cos v \\ \\ r^2 \sin^2 u\ \sin v \\ \\ r^2 \cos u\ \sin u \end{pmatrix}, \qquad \|s'_u(u,v) \times s'_v(u,v)\| = r^2 \sin u.$$

Így a felszín :

$$A(S) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin u\ dv\ du = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin u\ du = 4\pi r^2.$$

Szorgalmi házi feladat: Tegyük fel, hogy a felületet úgy kapjuk meg, hogy az (x,y) síkban adott sima görbét az x tengely körül megforgatunk. Mennyi ennek a forgástestnek a felszíne?