MATEMATIKA+ feladatok

2020. december 1.

Integrálszámítás.

I1. Hol a hiba?

"Az $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ függvény mindenütt POZITÍV. Integrálja:

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{x^2}\, dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{3} = -\frac{1}{3} - 1 = \underline{-\frac{4}{3} < 0} \qquad \text{NEGATIV!!!"}$$

I2. Tegyük fel, hogy az f függvény gráfja áthalad az origón és az $(1,1)$ ponton. Számítsuk ki az $\int\limits_0^1 f'(x)dx$ értékét.

I3. Számoljuk ki az alábbi határértéket:

$$\lim_{a\to 0+} \int_a^{m\cdot a} \frac{1}{x}\, dx, \qquad m > 0.$$

Miért meglepő, amit kapunk? Mi lehet a magyarázata a ennek az eredménynek?

I4. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Lássuk be, hogy

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1-x)\, dx.$$

I5. Tegyük fel, hogy $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ folytonos, és kielégíti az egyenletet:

$$f(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Igazoljuk, hogy ekkor $f(x) = 0$ minden x-re.

I6. Vajon konvergensek-e az alábbi improprius integrálok?

$$F_1 = \int_0^\infty \sin(x^2)\ dx, \qquad F_2 = \int_0^\infty \cos(x^2)\ dx.$$

(a) *1. lépes.* Végezzünk $x^2 = u$ helyettesítést.

(b) *2. lépés.* Parciális integrálással számítsuk ki kapott integrált egy véges $[a, b]$ szakaszon, ahol $0 < a < b < \infty$.

(c) *3. lépés.* Mit kapunk $a \to 0+$ és $b \to \infty$ esetén?

Értékeljük az eredményt. Ez a **Freshnel integrál.**