MATEMATIKA+ feladatok

2020. november 17.

Differenciálszámítás II.

D5. Végezzünk függvényvizsgálatot, és azután ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) **HF** $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

D*6. (Szélsőérték létezés?) Legyen $f : D \to \mathbb{R}$ elég sokszor differenciálható függvény, és $x_0 \epsilon$ int$D$. $f'(x_0) = 0$ szükséges feltétel, ezt feltesszük.

- $f''(x_0) \neq 0$ elégséges feltétel. Mit tudunk mondani, ha $f''(x_0) = 0$?
- Ha $f''(x_0) = 0$, és $f'''(x_0) \neq 0$?
- Ha $f''(x_0) = 0$, és $f'''(x_0) = 0$, de $f^{(4)}(x_0) \neq 0$?
- Tovább?

D7. **HF** Legyen a és b két tetszőleges pozitív szám. Igazoljuk, hogy

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \sqrt{ab}.$$

(Nem véletlenül van ez a feladat a differenciálszámítás témakörben...)

D8. **HF** Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható, **pozitív** függvény. Igazolja, hogy ha f konkáv, akkor konstans.

D9. $^{++}$ A Csebisev polinomokat a következőképpen definiáljuk:

$$T_n(\cos x) = \cos(nx), \qquad x \epsilon \mathbb{R}$$

Más szóval, $t = \arccos(x)$ helyettesítéssel $T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos(t))$.

Igazoljuk, hogy $T_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ valóban n-ed fokú polinom.

Bónusz

M5. Vajon állíthatjuk-e, hogy biztosan van két olyan magyar ember, akinek ugyanannyi magyar barátja van? (Feltesszük, hogy a barátság kölcsönos két ember közt. Önmagát nem tekinti senki barátjának.)