MATEMATIKA+ feladatok

2020. november 3.

Folytonosság II. Differenciálszámítás

F10. Milyen c esetén lesz az alábbi egyenletnek pontosan 1 megoldása?

$$\ln(x) = cx^2$$

F11. Bizonyítsuk be, hogy pontosan egy olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény létezik, amelyre

$$[f(x)]^3 + 3f(x) = x$$

teljesül minden $x \epsilon \mathbb{R}$ esetén.

Adjuk meg $f'(0)$-t.

F12. Számoljuk ki az alábbi határértékeket:

(a)

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = ?$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} \right) = ?$$

(c)

$$\lim_{x \to 0} (\sin(x))^x = ?$$

D1. Van-e olyan f 3-szor differenciálható függvény, melyre

$$f \neq f', \qquad f' \neq f'' \qquad \text{de} \qquad f = f^{(3)}?$$

D2. Gyógyszer lebomlására használják az alábbi modelt: Ha a kiinduló gyógyszer koncentrációja $K > 0$, akkor t idő múlva ez a koncentráció:

$$C(t) = K(e^{-at} - e^{-bt}), \qquad b > a > 0.$$

(a) Igazoljuk, hogy $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$.

(b) $C'(t) =$? Milyen sebességgel tisztul ki a vérből a hatóanyag?

(c) Mikor lesz ez 0 ill. pozitív/negatív?

D3. Igazoljuk, hogy ha $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, ahol $f'(x) \neq 0$, és melyre

$$f(xy) = f(x) + f(y) \qquad \forall x,\ y > 0,$$

akkor $\exists \alpha$, mellyel a függvény ilyen alakban írható:

$$f(x) = \alpha \ln(x).$$

D4*. Van-e olyan folytonos függvény, amely mindenütt folytonos, de sehol sem deriválható?

Bónusz

M4. Igazoljuk az alábbi azonosságot.

$$\ln(\operatorname{tg} 1°) \cdot \ln(\operatorname{tg} 2°) \ldots \ln(\operatorname{tg} 89°) = \ln(\operatorname{tg} 1°) + \ln(\operatorname{tg} 2°) + \cdots + \ln(\operatorname{tg} 89°).$$

(Vigyázat, ez nem egy "szabály"...)