

MATEMATIKA + feladatok

2020. október 13.

Valós függvények. Folytonosság

F1. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ az alábbi függvény:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ha } x = \frac{p}{q}, \quad \text{ahol } p, q \in \mathbb{N} \text{ relativ primek.} \\ 0 & \text{ha } x \text{ irrac.} \end{cases}$$

Hol folytonos f ?

F2. Igazoljuk, hogy ha tetszőleges x -re és adott a -ra $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ teljesül, akkor $f(x)$ periodikus függvény! (Segítség: $f(x+2a) = ?$)

F3. Legyen az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós folytonos függvény **additív**, azaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

Bizonyítsuk be, hogy f lineáris (azaz $f(x) = cx$ valamely c konstanssal),

F4. Van-e olyan folytonos függvény a $[0, 1]$ intervallumon, mely **minden értéket pontosan kétszer** vesz fel? (Tipp?) Igazoljuk.

F5. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $R_f \subset \mathbb{Q}$. Tegyük fel, hogy $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Igazoljuk, hogy ekkor $f(x) \equiv \frac{1}{2}$.

F6. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, melyre $f(f(x)) = -x$ teljesül **minden** $x \in \mathbb{R}$ esetén? (Tipp?) Igazoljuk.

F7. Egy f függvény fixpontja c , ha $f(c) = c$. Legyen $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ olyan folytonos függvény, melyre $D_f = R_f = [0, 1]$. Igazoljuk, hogy a függvénynek van fixpontja.

F8. + Egy tibeti szerzetes reggel 7-kor elhagyja a kolostort, hogy szokásos útvonalán felmenjen a hegytetőre, és este 7-kor megérkezik.

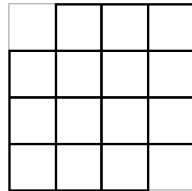
Másnap reggel újra 7-kor indul a hegycsúcsról, és este 7-re visszaér a kolostorba.

Igazoljuk, hogy az útvonalon van olyan pont, ahol mindkét nap pontosan ugyanakkor megy át a szerzetes. (Nem tehetjük fel, hogy egyenletes sebességgel járja az útját. Időnként elfárad, időnként erőre kap.)

F9. Van-e olyan függvény, amelyik szigorúan monoton és csak irracionális értéket vesz fel?

Bónusz

M1. Egy 4×4 -es rács két átellenes sarokmezőjét kivágtuk. Lefedhető-e a megmaradt 14 mező 7 darab 2×1 -es lappal?



Ugyanez a kérdés, a kiinduló rács 8×8 -as. Vajon az lefedhető-e?

