

MATEMATIKA + feladatok

2020. szeptember 29.

Számsorozatok, számsorok

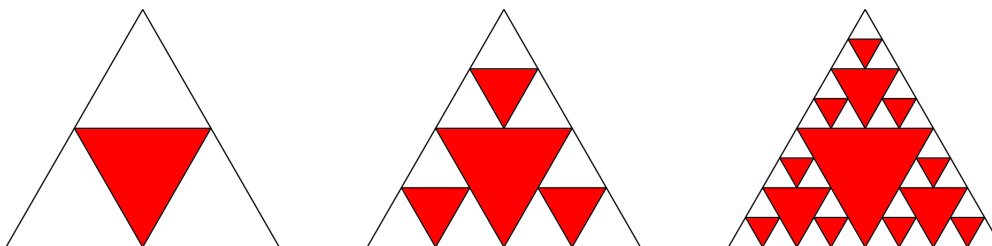
- S1. Adott (a_n) egy konvergens számsorozat (akár nullsorozat is lehet). Legyen $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Tegyük fel, hogy a (b_n) is konvergens. Lássuk be, hogy akkor

$$|\lim_{n \rightarrow \infty} b_n| \leq 1.$$

- S2. Igazoljuk, hogy az $a_{n+1} = \sin(a_n)$ sorozat határértéke 0, minden a_1 kezdetiértékre.
- S3. Konstruáljunk egy sokszöget egységnyi területű szabályos háromszögből kiindulva:
- (a) Beírjuk a középvonalai által alkotott háromszöget.
 - (b) Ezután vesszük az eredetivel egyállású részeket es azokba is beírjuk a középvonalai által alkotott háromszögeket.

Ezt rekurzívan ismétljük. A kapott alakzat a SIERPINSKI HÁROMSZÖG.

A beírt háromszögek összterülete hányadik iteráció után haladja meg a $175/256$ értéket?



- S4. *Igazoljuk, hogy konvergens sorozatnak biztosan van *vagy* maximális *vagy* minimális eleme, esetleg mindkettő. (Ötlet: konvergens sorozat alulról és felülről is korlátos.)
- S5. Határozzuk meg az $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ sorozat határértékét. Általános kezdetiérték mellett: $a_0 = x \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
- S6. Írjuk fel az alábbi végtelen összeget sorozat határértékeként.

$$A = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}$$

Házi feladatok

SH1. Legyen $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. A sorozat többi tagja kielégíti az alábbi összefüggést:

$$13^{a_n} = 12^{a_{n-1}} + 5^{a_{n-2}}, \quad n \geq 2$$

Bizonyítsuk be, hogy (a_n) monoton növény és korlátos. Mennyi a sorozat határértéke?

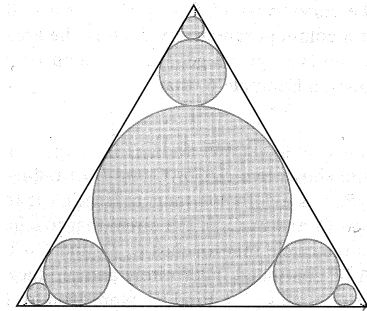
SH2. Hagyjuk el az

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

harmonikus összegből azon tagokat, amelyekben a nevezőben van 6-os számjegy. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott sor konvergens.

SH3. Igazoljuk, hogy minden $+\infty$ -be tartó sorozatnak van legkisebb eleme.

SH4. A mellékelt ábrán végtelen sok kör van, melyek az egyenlő oldalú háromszög csúcsai felé haladnak. Mindegyik kör érinti a mellette levőket és a háromszög oldalait. A háromszög oldalai egység hosszúak, mennyi a körlapok össz-területe?



Bónusz

M3. Sándor Mátyás esetéből okulva, a hazafiak vezére egy egyenletet küldött barátainak:

$$2x^2 + 4xy + 7y^2 - 12x - 2y + N = 0.$$

A titkos üzenet az volt, hogy a hónap N . napján legyen a felkelés. A hazafiak gyakran mondogatták, hogy A FELKELÉS AZ EGYETLEN MEGOLDÁS. Ez jellemezte N -et is: az egyenletet egyetlen (x, y) valós számpár elégítette ki. Mennyi N értéke?