Matematikai Analízis I.

Feladatok a Differenciálegyenletek témakörből

2018.

Megoldások

Jelölések

A differenciálegyenlet megoldása $y = y(x)$ függvény.

A függvény értelmezési tartománya $I \subset \mathbf{R}$ *intervallum*, a függvény $y : I \to \mathbf{R}$. Ha külön nem jelzem, akkor az általános megoldásban I bármi lehet.

Az általános megoldásban szereplő c konstans: $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ha külön nem jelzem másképp.

Megoldások

Sz.1 $\quad y^3(x) = \dfrac{2}{e^{2x} + c}$

Sz.2 $\quad y(x) = \ln(e^x + c), \qquad c > 0.$

Sz.3 $\quad y(x) = c\sin(x), \quad k\pi \notin I,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

Sz.4 $\quad y(x) = \dfrac{c}{\cos(x)}, \quad \dfrac{\pi}{2} + k\pi \notin I,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

Sz.5 $\quad \dfrac{1}{y(x)} = \ln|1 - x^2| + c, \quad I \subset (-\infty, -1)$ vagy $I \subset (-1, 1)$ vagy $I \subset (1, \infty)$.

$\boxed{\text{Sz.6}}$ A DE: $y' = \dfrac{y^2}{1 - x^2}$, azaz:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - x^2}$$

Innen formálisan:

$$\text{"}\,\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{1 - x^2}\,\text{"}.$$

Kiintegrálva:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = \int \frac{1}{1 - x^2} dx.$$

A baloldal egyik primitív függvénye:

$$\int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy = \frac{y^{-1}}{-1} = \frac{-1}{y}. \tag{1}$$

A jobboldal egyik primitív függvényének kiszámításához elemi törtekre kell bontani az integrandust:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} \quad \Longrightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

Így a jobb oldali integrál egyik primitív függvénye:

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = \frac{1}{2}\left(\ln|1+x| - \ln|1-x|\right).$$

Végül ezt kapjuk:

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{1/2}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből megkapjuk a megoldást:

$$\frac{1}{y(x)} = -\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|^{1/2} + c = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|^{1/2} + c, \qquad c \in \mathbf{R},$$

ahol $y(x)$ értelmezési tartományára $I \subset (-\infty, -1)$ vagy $I \subset (-1, 1)$ vagy $I \subset (1, \infty)$.

Sz.7 $\quad y^2(x) = 2\operatorname{arc\,tg}(x) + c.$

Sz.8 $\quad y^2(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x) + c.$

$\boxed{\text{Sz.9}}$ A DE $y' = \dfrac{1}{y \cdot (1-4x^2)}$, azaz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y \cdot (1-4x^2)}.$$

Innen formálisan:

$$''y\ dy = \frac{dx}{1-4x^2}''.$$

Kiintegrálva:

$$\int y\ dy = \int \frac{1}{1-4x^2}dx.$$

A baloldal egyik primitív függvénye:

$$\int y\ dy = \frac{y^2}{2}. \tag{3}$$

A jobboldal egyik primitív függvényének kiszámításához elemi törtekre kell bontani az integrandust:

$$\frac{1}{1-4x^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1+2x} \quad \Longrightarrow \quad A = B = \frac{1}{2}.$$

Így a jobb oldali integrál egyik primitív függvénye:

$$\int \frac{1}{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+2x}+\frac{1}{1-2x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\ln|1+2x| - \frac{1}{2}\ln|1-2x|\right).$$

Végül ezt kapjuk:

$$\int \frac{1}{1-4x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+2x}{1-2x}\right|^{1/2}. \tag{4}$$

A (3) és (4) egyenletekből megkapjuk a megoldást:

$$y^2(x) = \ln\left|\frac{1-2x}{1+2x}\right|^{1/2} + c, \quad c \in \mathbf{R}.$$

A DE megoldásfüggvénye $y : I \to \mathbf{R}$, ahol I olyan intervallum, melyre $\frac{1}{2} \notin I$, $-\frac{1}{2} \notin I$.

Sz.10 $\operatorname{arc\,tg} y(x) = \ln|x+1| + c$, ahol $-1 \notin I$.

Sz.11 *1. megoldás.* $y(x) \equiv -1$.

2. megoldás. $y(x) = -1 + cx(x-2)$, ahol $c \neq 0$ és $0 \notin I$, és $2 \notin I$.

Sz.12 $y(x) + \frac{1}{3}y^3(x) = \ln|x^3| + c$, ahol $0 \notin I$.

Sz.13 $y^2(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{2}x\right) + c$.

Sz.14 $y(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}$.

Sz.15 $y(x) = e^{-x}$.

Sz.16 $y(x) = e^{1-e^x}$.

Sz.17 $y(x) = x$.

Sz.18 $y^2(x) = 2\ln(e^x+1) - 2\ln(e+1) + 1$.

Sz.19 $y(x) \equiv 1$.

L.1 $y(x) = ce^{-x}$.

L.2 $y(x) = ce^{-x} + 2$.

L.3 $y(x) = ce^{-x^2}$.

L.4 $y(x) = ce^{-x} + \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$.

L.5 $\quad y(x) = ce^{x^2/2}.$

L.6 $\quad y(x) = ce^{-2x} + \dfrac{1}{2}.$

L.7 $\quad y(x) = \dfrac{c}{x^2}.$

L.8 $\quad y(x) = (c + x^2)e^{-x^2}.$

L.9 $\quad y(x) = cx^2.$

L.10 $\quad y(x) = ce^{x^2/2} + \dfrac{x^4}{4}e^{x^2/2}.$

L.11 $\quad y(x) = ce^{-x^2/2}.$

$\boxed{\text{L.12}}$ Ez egy homogén LDE, melynek általános alakja $y' = a(x)y$. Most $a(x) = \dfrac{1}{x\ \ln(x)}$. Tudjuk, hogy a HLDE általános megoldása:

$$y_{alt}(x) = ce^{A(x)}, \qquad \text{ahol} \quad A(x) = \int a(x)\ dx, \qquad c \in \mathbf{R}.$$

Most tehát:

$$A(x) = \int \frac{1}{x\ \ln(x)} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} dx = \int \frac{\ln'(x)}{\ln(x)} dx = \ln|\ln(x)|.$$

Ekkor

$$e^{A(x)} = e^{\ln|\ln(x)|} = |\ln(x)| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y(x) = c\ln(x)}, \quad c \in \mathbf{R}.$$

A DE megoldásfüggvénye $y : I \to \mathbf{R}$, ahol I olyan intervallum, melyre $I \subset (0, 1)$ vagy $I \subset (1, \infty)$. Tehát az ÉT olyan intervallum, ahol az $\ln(x)$ függvény értelmezve van és előjele nem változik.

L.13 $\quad y(x) = ce^{-x} + e^{x}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\right).$

L.14 $\quad y(x) = ce^{-x/2} + 2x^3 - 12x^2 + 48x - 96.$

L.15 $\quad y(x) = e^{2x}.$

L.16 $\quad y(x) = e^{1-x^2}.$

L.17 $\quad y(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{e}}e^{x^2/2}.$

L.18 $\quad y(x) = -x^2.$

L.19 $\quad y(x) = \dfrac{1}{\ln 2}\ln(x).$

L.20 $y(x) = x.$

L.21 $y(x) = -e^{-x/2} + 2.$

L.22 $y(x) = -e^{-x^2}(x^2 + 1).$