Matematikai Analízis I.

Feladatok a Differenciálegyenletek témakörből

2017.

Megoldások

Jelölések

A differenciálegyenlet megoldása $y = y(x)$ függvény.

Az értelmezési tartomány I *intervallum*, $y : I \to \mathbf{R}$. Ha külön nem jelzem, akkor az általános megoldásban ez bármi lehet.

Az általános megoldásban szereplő c konstans: $c \in \mathbf{R}$ tetszőleges, ha külön nem jelzem másképp.

Szeparábilis differenciálegyenletek

Sz.1 $\quad y^3(x) = \dfrac{-6}{e^{2x} + c}$

Sz.2 $\quad y(x) = \ln(e^x + c), \qquad c > 0.$

Sz.3 $\quad y(x) = c\sin(x), \quad k\pi \notin I,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

Sz.4 $\quad y(x) = \dfrac{c}{\cos(x)}, \quad \dfrac{\pi}{2} + k\pi \notin I,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$

Sz.5 $\quad \dfrac{1}{y(x)} = \ln|1 - x^2| + c, \quad I \subset (-\infty, -1)$ vagy $I \subset (-1, 1)$ vagy $I \subset (1, \infty)$.

Sz.6 $\quad \dfrac{1}{y(x)} = \ln\left|\dfrac{1 - x}{1 + x}\right| + c, \quad I \subset (-\infty, -1)$ vagy $I \subset (-1, 1)$ vagy $I \subset (1, \infty)$.

Sz.7 $\quad y^2(x) = 2\operatorname{arc\,tg}(x) + c.$

Sz.8 $\quad y^2(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x) + c.$

Sz.9 $\quad y^2(x) = \ln\left|\dfrac{1 - 2x}{1 + 2x}\right| + c$, ahol $\dfrac{1}{2} \notin I$, $-\dfrac{1}{2} \notin I$.

Sz.10 $\operatorname{arc\,tg} y(x) = \ln|x+1| + c$, ahol $-1 \notin I$.

Általános megoldás keresünk, kicsit nehezebb integrálokkal

Sz.11 *1. megoldás.* $y(x) \equiv -1$.

2. megoldás. $y(x) = -1 + cx(x-2)$, ahol $c \neq 0$ és $0 \notin I$, és $2 \notin I$.

Sz.12 $y(x) + \frac{1}{3}y(x)^3 = \ln|x^3| + c$, ahol $0 \notin I$.

Sz.13 $y^2(x) = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{2}x\right) + c$.

Sz.14 $y(x) = \frac{c}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2}$.

Cauchy feladatok

Sz.15 $y(x) = e^{-x}$.

Sz.16 $y(x) = e^{1-e^x}$.

Sz.17 $y(x) = x$.

Sz.18 $y(x)^2 - 1 = 2\ln(e^x+1) - 2\ln(e+1)$.

Sz.19 $y(x) = 1$.

Lineáris differenciálegyenletek

L.1 $y(x) = ce^{-x}$.

L.2 $y(x) = ce^{-x} + 2$.

L.3 $y(x) = ce^{-x^2}$.

L.4 $y(x) = ce^{-x} + \frac{1}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)$.

L.5 $y(x) = ce^{x^2/2}$.

L.6 $y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{2}$.

L.7 $y(x) = \frac{c}{x^2}$.

L.8 $y(x) = (c + x^2)e^{-x^2}$.

L.9 $y(x) = cx^2$.

L.10 $y(x) = ce^{x^2/2} + \frac{x^4}{4}e^{x^2/2}$.

L.11 $y(x) = ce^{-x^2/2}$.

L.12 $y(x) = c\ln(x)$.

L.13 $y(x) = ce^{-x} + e^x\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$.

L.14 $y(x) = ce^{-x/2} + 2x^3 - 12x^2 + 48x - 96$.

Homogén és inhomogén LDE. Cauchy feladat.

L.15 $y(x) = e^{2x}$.

L.16 $y(x) = e^{1-x^2}$.

L.17 $y(x) = -\frac{1}{\sqrt{e}}e^{x^2/2}$.

L.18 $y(x) = -x^2$.

L.19 $y(x) = \frac{1}{\ln 2}\ln(x)$.

L.20 $y(x) = x$.

L.21 $y(x) = -e^{-x/2} + 2$.

L.22 $y(x) = -e^{-x^2}(x^2 + 1)$.