3. fejezet

Valós függvények

3.1. Bevezetés

3.1.1. Alaptulajdonságok

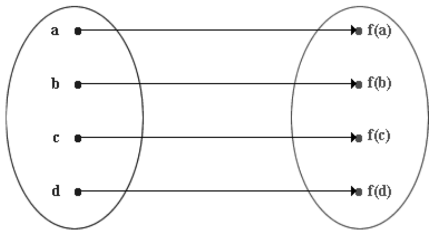
Adott egy $f : X \longrightarrow Y$ leképezés. Ez azt jelenti, hogy minden $x \epsilon X$ elemhez hozzárendelünk az Y halmazból egy y elemet, és ezt így jelöljük:

$$y = f(x).$$

Szokásos még az

$$x \mapsto y$$

jelölés is.



3.1. ábra. Függvény, egy hozzárendelés.

A függény értelmezési taromànyát D_f jelöli. A fügugvény értékkészlete mindazon $y \epsilon Y$ elemek halmaza, melyek előállnak képként, azaz

$$R_f = \{y \epsilon Y \ : \quad \exists x \epsilon X, \quad y = f(x)\}.$$

3.1. Definíció. *Az f függvény injektív, ha $f(x_1) \neq f(x_2)$ bármely $x_1 \neq x_2 \epsilon D_f$ esetén. A függvény szürjektív, ha minden $y \epsilon Y$- hoz létezik x, melyre $y = f(x)$. A függvény bijektív, ha injektív és szürjektív azaz a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű X és Y között.*

3.2. Definíció. *Adott két függvény, $f : X \rightarrow Y$ és $g : Y \rightarrow Z$. Az összetett függvény $X \rightarrow Z$ típusú hozzárendelés lesz, melyre $x \mapsto g(f(x))$. Jele: $g \circ f$, ahol g a külső-, f a belső függvény. Értelmezési tartománya*

$$D_{g \circ f} = \{x : \ x \epsilon X, \ f(x) \epsilon D_g\}.$$

Példa. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin(x)$. Ekkor $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmezhető:

$$f \circ g(x) = \sin^2(x), \qquad g \circ f(x) = \sin(x^2).$$

Ha a függvény bijektív, akkor létezik inverz függvény

$$f^{-1} : Y \ \rightarrow \ X,$$

melyre

$$f^{-1}(f(x)) = x,$$

illetve hasonlóképpen

$$f(f^{-1}(y)) = y, \qquad \forall y \epsilon Y.$$

Megjegyzés. A függvények esetén az f^{-1} jelölés NEM jelent reciprokot! Egészen mást jelent, mint az $1/f$ függvény.

A fenti definíciók tetszőleges X és Y esetén értelmezhetőek. A továbbiakban csak **valós függvényekkel** foglalkozunk, tehát feltesszük, hogy

$$X \subset \mathbb{R}, \qquad Y \subset \mathbb{R}.$$

Megjegyzés. Valós függvények esetén szemléletesen az inverzfüggvény gráfját úgy kapjuk, hogy az x és y tengelyek felcserélődnek. Egy függvény akkor invertálható, ha bármely x tengellyel párhuzamos egyenes legfeljebb csak egy pontban metszi a gráfot.

3.3. Definíció. *Az f függvény alulról korlátos, ha R_f alulról korlátos. Az f függvény felülről korlátos, ha R_f felülről korlátos. Végül az f függvény korlátos, ha R_f korlátos.*

Megjegyzés. Másképp fogalmazva, az f függvény korlátos, ha $\exists K$, hogy

$$|f(x)| \leq K, \qquad \forall x \epsilon D_f.$$

3.4. Definíció. *Az f függvény páros, ha D_f szimmetrikus (azaz $x \epsilon D_f$ esetén $-x \epsilon D_f$ is teljesül) és*

$$f(-x) = f(x), \qquad \forall x \epsilon D_f.$$

Az f függvény páratlan, ha D_f szimmetrikus és

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \epsilon D_f.$$

Példa. Az $f(x) = x^2$ függvény páros, az $f(x) = x^5$ függvény páratlan.

3.5. Definíció. *Az f függvény monoton növő (más szóval növekvő), ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

f szigorúan monoton növő, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

3.6. Definíció. *Az f függvény monoton fogyó (más szóval csökkenő), ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén*

$$x_1 \leq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

f szigorúan monoton fogyó, ha minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2).$$

3.7. Definíció. *Az f függvény periódikus p periódussal, ha tetszőleges $x, x + p \epsilon D_f$ esetén*

$$f(x + p) = f(x).$$

Megjegyzés. Ha egy függvény periódikus p periódussal, akkor p tetszőleges egész számú többszöröse is periódusa lesz.

3.1.2. Elemi függvények

Felsoroljuk az elemi függvények néhány típusát, melyekkel majd részletesebben fogunk foglalkozni.

1. Racionális függvények. Ezek olyan függvények, melyeket az $y = x$-ból elemi algebrai műveletekkel kaphatunk meg.

1. *Polinomok.* Általános alakjuk a következő:

$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Például $n = 1$ esetén $l(x) = ax + b$ lineáris függvény, $n = 2$ esetén $q(x) = ax^2 + bx + c$ kvadratikus függvény. Ezekre a polinomokra $D_f = \mathbb{R}$.

2. *Racionális tört függvények.* Ezek a függvények két polinom hányadosaként állnak elő:

$$y = f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}, \quad n, m \epsilon \mathbb{N}.$$

Ha a nevező zérushelyeit H jelöli, akkor $D_f = \mathbb{R} \setminus H$. Például

$$y = \frac{1}{x}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Algebrai függvények. Ezek a racionális tört függvények inverzei. Például az $f(x) = x^n$ függvény $\mathbb{R}^+$-re vett leszűkítését tekintjük. Ennek inverze:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}.$$

Az inverzfüggvény értelmezési tartománya D_f: $\mathbb{R}^+ = \{x : x \geq 0\}$. (*Megjegyzés.* ha n páratlan, akkor a fenti függvény kiterjeszthető a negatív x-ekre is.)

Trigonometrikus függvények.

Geometriai értelmezése a $\sin(x)$, $\cos(x)$ függvényeknek $0 \leq x \leq 2\pi$ esetén (középiskolából ezt ismertnek tételezzük fel), tg x, $x \epsilon (-\pi/2, \pi/2)$ illetve ctg (x) $x \epsilon (0, \pi)$ esetén.

Tetszőleges $x \epsilon \mathbb{R}$ esetén a fent definiált függvényt terjesztjük ki 2π szerint periódikusan.

Megjegyzés. Ne felejtsük el, hogy a szögeket radiánban mérjük, nem fokban.

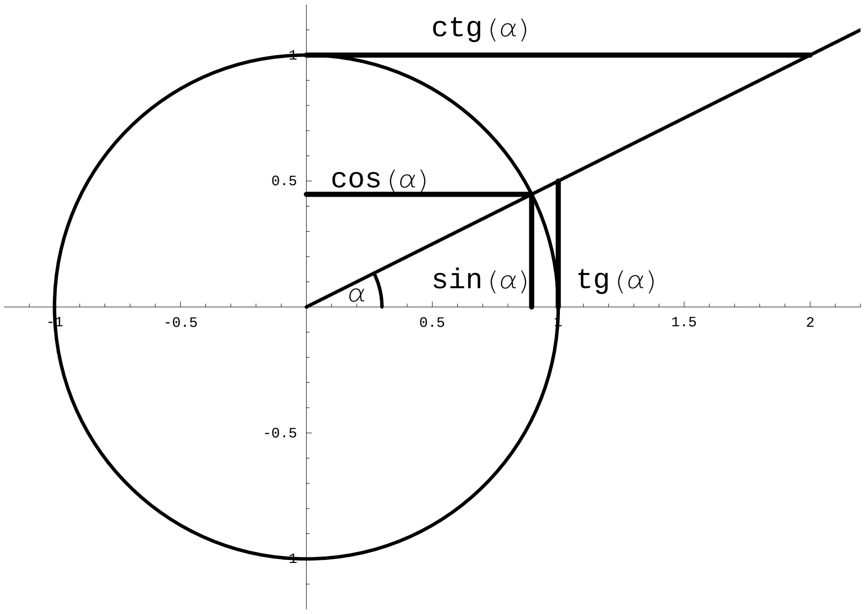
Exponenciális és logaritmus függvények. Ha $a > 0$, akkor $y = a^x$, egyenlőre $x \epsilon Q$ esetén van csak értelmezve.

3.2. Folytonosság

3.2.1. A folytonosság értelmezése

Heurisztikusan, egy függvény x_0 pontbeli folytonossága azt jelenti, hogy ha x_0-ban picit változtatunk, akkor a függvényérték is picit változik, nincs ugrás ebben a pontban.

Emlékeztetünk arra, hogy egy x_0 pont környezetei $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ alakú intervallumok.



3.2. ábra. A trigonometrikus függvények geometriai értelmezése.

3.8. Definíció. *Adott egy $f : X \to Y$ függvény és egy $x_0 \epsilon D_f$ pont. Azt mondjuk, hogy f az x_0-ban folytonos, ha $\forall \varepsilon > 0$ hoz létezik olyan $\delta > 0$, melyre teljesül, hogy*

$$\forall x \epsilon D_f, \qquad |x - x_0| < \delta$$

esetén

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Szemléletesen így képzelhetjük el a folytonosságot egy x_0 pontban. Legyen az x_0-hoz tartozó függvényérték $f(x_0) = y_0$. Az y_0 körül tekintünk egy $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ közti vízszintes sávot. Ekkor létezik az x_0 körül egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (függőleges) sáv, melyre a függvény grafikonja az $(y_0 - \varepsilon; y_0 + \varepsilon)$ és $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ sávok metszetébe esik.

Definíció átfogalmazása: Az f függvény folytonos az $x_0 \epsilon D_f$ pontban, ha $f(x_0)$ tetszőleges U környezetéhez létezik az x_0-nak olyan V környezete, melyre minden $x \epsilon V$, $x \epsilon D_f$ esetén $f(x) \epsilon U$.

Példa. Tekintsünk egy lineáris függvényt, legyen $f(x) = 5x + 3$ és $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges pont. Ekkor

$$|f(x) - f(x_0)| = |(5x + 3) - (5x_0 + 3)| = |5(x - x_0)|.$$

Adott $\varepsilon > 0$. Kérdés: $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ mikor teljesül?

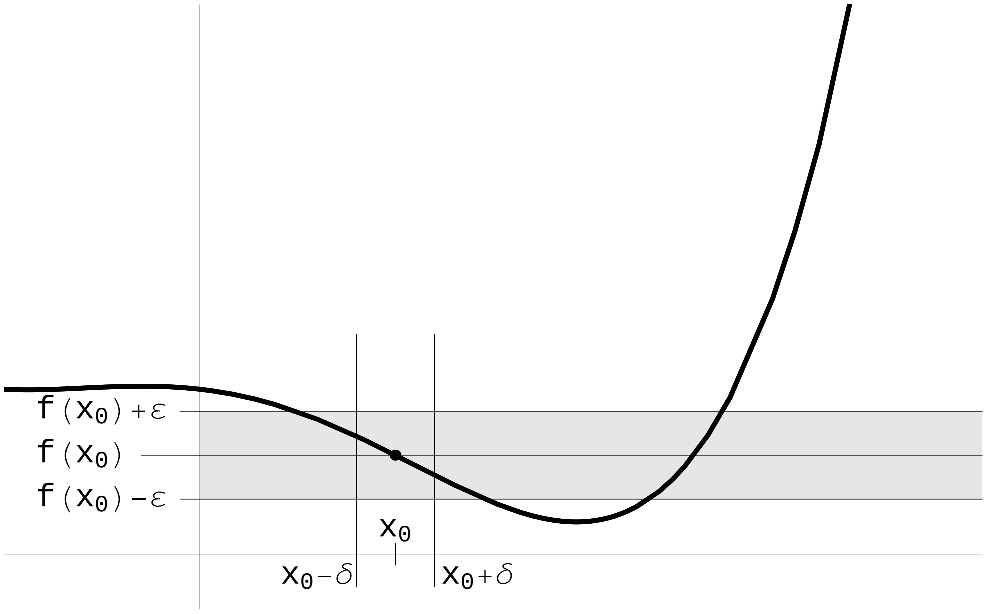
$$\delta = \frac{\varepsilon}{5}$$

választással, ha $|x - x_0| < \varepsilon/5$, akkor

$$|f(x) - f(x_0)| < 5\frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Példa. Az $f(x) = \sin(x)$ függvény folytonos minden pontban. **HF**

3.9. Definíció. *Ha f nem folytonos az $x_0 \epsilon D_f$ pontban, akkor ott szakadása van.*



3.3. ábra. A folytonosság geometriai értelmezése.

Megjegyzés. Szokás akkor is szakadási helyről beszélni, ha $x_0 \notin D_f$, de van x_0-nak olyan $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ alakú környezete, melyre $U \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

Példa. Legyen

$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad x > 0 \\ -1 & \text{ha} \quad x < 0 \\ 0 & \text{ha} \quad x = 0 \end{cases}.$$

Ekkor $D_f = \mathbb{R}$, belátjuk, hogy f-nek a 0-ban szakadása van. $f(0) = 0$, és legyen $\varepsilon = 1/2$. Nyilván nem tudunk megadni a 0 körül olyan $(-\delta, \delta)$ intervallumot, melyben a függvényértékek abszolút értéke kisebb lesz mint 1/2.

3.10. Definíció. *Az f függvény értelmezési tartományának egy x_0 pontjában sorozatfolytonos, ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

3.1. Tétel. *Az f függvény az x_0-ban folytonos $\Longleftrightarrow$ x_0-ban sorozatfolytonos.*

Bizonyítás.

1. Tegyük fel, hogy f az x_0-ban folytonos. Belátjuk, hogy sorozatfolytonos. Legyen $(x_n) \subset D_f$ olyan sorozat, melyre $x_n \to x_0$. Igazolni kell, hogy $f(x_n) \to f(x_0)$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A folytonosság miatt ehhez az ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, melyre

$$|x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

A sorozat konvergenciája miatt ehhez a δ-hoz létezik N küszöbindex, ha $n \geq N$, akkor $|x_n - x_0| < \delta$. Így ezekre az indexekre $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ teljesül.

2. Tegyük fel, hogy f az x_0-ban sorozatfolytonos. Indirekt módon tegyük fel, hogy f nem folytonos x_0-ban, azaz létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyre ("$\forall\delta$ rossz"), minden $\delta > 0$-hoz létezik $x\epsilon D_f$: $|x - x_0| < \delta$ és mégis $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Ekkor a a $\delta = 1/n$-hez is van olyan x_n, melyre $|x_n - x_0| < \delta$ és $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Tekintsük ezt az (x_n) sorozatot. Ez a következő tulajdonságú: $(x_n) \subset D_f$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ és mivel $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ $\forall n$-re, ezért $f(x_n)$ nem tart $f(x_0)$-hoz, ez ellentmondás. Így az indirekt feltevésünk nem helyes, tehát f az x_0-ban folytonos.

Példa. Legyen $f(x) = 2x^3 - 3$, $x_0 = 2$. Folytonos-e x_0-ban a függvény?

Legyen (x_n) egy sorozat, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. Ekkor

$$|f(x_n) - f(2)| = |2x_n^3 - 3 - 2x_0^3 + 3| = 2|x_n^3 - x_0^3| = 2|x_n - x_0| \cdot |x_n^2 + x_0 \cdot x_n + x_0^2| \leq$$

$$\leq 2 \cdot 19|x_n - x_0|,$$

ahol felhasználtuk, hogy $x_n\epsilon(1,3)$ feltehető és $x_0 = 2$. Azt kaptuk tehát, hogy

$$|f(x_n) - f(2)| \leq 2 \cdot 19|x_n - x_0|.$$

Legyen adott $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $x_n \to x_0$, ezért van olyan N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén

$$|x_n - x_0| < \varepsilon/38,$$

és ekkor $|f(x_n) - f(2)| < \varepsilon$.

Példa. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad x \quad \text{racionális} \\ \\ -1, & \text{ha} \quad x \quad \text{irracionális} \end{cases}.$$

Ez a függvény NEM folytonos. Valóban, ha $x_0\epsilon\mathbb{R}$, x_0 racionális, akkor legyen

$$x_n = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}.$$

Erre a sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad f(x_n) \equiv -1.$$

Másrészt $f(x_0) = 1$, így nem teljesül a sorozatfolytonosság. Ha x_0 irracionális, akkor a sorozat n-dik tagja legyen x_0 végtelen tizedestört felírásában az első n tagot tartalmazó szám. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1 \neq f(x_0) = -1,$$

a függvény itt sem folytonos.

Megjegyzés. Közvetlenül is igazolható, hogy nem folytonos, például $\varepsilon = 1$-re sem találunk $\delta > 0$-t.

3.2.2. Határérték

3.11. Definíció. *Adott $f : X \to Y$ függvény és $x_0 \epsilon \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $U = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ környezet, melyre minden $x \epsilon U$, $x \neq x_0$ esetén $x \epsilon D_f$ (esetleg az $x_0 \not\epsilon D_f$ is előfordulhat). Azt mondjuk, hogy az f függvény határértéke x_0-ban α, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, melyre ha*

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

akkor

$$|f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha.$$

Megjegyzés. A határérték definíciójában az x_0-beli helyettesítési érték nem játszik szerepet.

3.12. Definíció. *(Általános definíció) Azt mondjuk, hogy f határértéke az $x_0 \epsilon \mathbb{R}$-ben $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, ha az α szám tetszőleges U környezetéhez létezik x_0-nak olyan V környezete, melyre minden $x \epsilon V$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) \epsilon U$.*

3.13. Definíció. *Azt mondjuk, hogy f jobboldali határértéke x_0-ban $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, melyre ha*

$$x \epsilon D_f, \qquad x_0 < x < x_0 + \delta$$

teljesül, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \alpha.$$

Azt mondjuk, hogy f baloldali határértéke x_0-ban $\alpha \epsilon \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, melyre ha

$$x \epsilon D_f, \qquad x_0 - \delta < x < x_0$$

teljesül, akkor $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Ezt így jelöljük:

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \alpha.$$

A jobb- és baloldali határértékre használatos még az alábbi jelölés:

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0 + 0), \qquad \lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0 - 0).$$

3.1. Állítás. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha \iff \lim_{x \to x_0+} f(x) = \alpha$ *és* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \alpha$

A fenti általános definíció alapján a határtérték-fogalmat kiterjesztjük arra az esetre, amikor $x_0 = \pm\infty$ és/vagy $\alpha = \pm\infty$ lesz.

3.14. Definíció. *A határérték-fogalom kiterjesztése ("$x_0 = \pm\infty$")*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \alpha,$$

ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $K\epsilon\mathbb{R}$, hogy minden $x\epsilon D_f$, $x > K$ esetén $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül. Hasonlóan,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \alpha,$$

ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $K\epsilon\mathbb{R}$, melyre minden $x\epsilon D_f$: $x < K$ esetén $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ teljesül.

3.15. Definíció. *($\alpha = \pm\infty$)*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty,$$

ha minden $K\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik $\delta > 0$, melyre minden $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ eseén $f(x) > K$ teljesül. Hasonlóan,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty,$$

ha minden $K\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik olyan $\delta > 0$, melyre minden $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ esetén $f(x) < K$ teljesül.

3.16. Definíció. *($x_0 = +\infty$ és $\alpha = +\infty$)*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

ha minden $K\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik $L\epsilon\mathbb{R}$, hogy minden $x > L$, $x\epsilon D_f$ esetén $f(x) > K$. Hasonlóan,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty,$$

ha minden $K\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik olyan $L\epsilon\mathbb{R}$, hogy minden $x < L$, $x\epsilon D_f$ esetén $f(x) < K$.

Megjegyzés. Hasonlóan értelmezhető, hogy a jobb- illetve baloldali határérték a véges $x_0\epsilon\mathbb{R}$-ben $+\infty$ illetve $-\infty$:

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x) = \infty.$$

3.2.3. Átviteli elv

3.2. Állítás. *1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ pontosan akkor teljesül, ha minden (x_n) sorozatra, melyre*

$$(x_n) \subset D_f, \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad x_n \neq x_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = \alpha$ akkor és csak akkor ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre $x_n > x_0$ és

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = \alpha$ *akkor és csak akkor, ha minden olyan* $(x_n) \subset D_f$ *sorozatra, melyre* $x_n < x_0$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha.$$

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Meghatározzuk a

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

határértéket az átviteli elv alkalmazásával. Legyen (x_n) olyan sorozat, melyre $x_n \neq 1$, és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ekkor $f(x_n) = x_n + 1$, így a határérték:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}(x_n+1) = 2.$$

Megjegyzés. Az átviteli elvek átfogalmazhatók arra az esetre is, amikor $x_0 = \pm\infty$ és/vagy $\alpha = \pm\infty$.

3.2.4. A határérték tulajdonságai

Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \beta$.

3.3. Állítás. *1.* $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\alpha$, $c\epsilon\mathbb{R}$

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \alpha+\beta$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \alpha\beta$

A fenti tulajdonságok az átviteli elv alkalmazásával azonnal következnek a sorozatokra igazolt tulajdonságokból.

Definiáltuk a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$$

határértéket abban az esetben is, amikor x_0 és/vagy α véges illetve végtelen. Ezekre adunk most példákat.

1. eset. $x_0\epsilon\mathbb{R}$, $\alpha\epsilon\mathbb{R}$

2. eset. $x_0\epsilon\mathbb{R}$, $\alpha = \infty$.
Legyen $f(x) = 1/|x|$, $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty.$$

Ehhez igazolni kell, hogy minden $K\epsilon\mathbb{R}$-hez létezik δ, melyre $|x-x_0| < \delta$ esetén teljesül, hogy $f(x) > K$. Legyen K tetszőleges. Ekkor $|x| < \frac{1}{K}$ esetén $\frac{1}{|x|} > K$, azaz $f(x) > K$. Tehát $\delta = \frac{1}{K}$ jó választás.

3. eset. $x_0 = +\infty$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.
Legyen
$$f(x) = \frac{x}{x+1},$$
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Belátjuk hogy
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1.$$
Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor a
$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$$
feltétel azt jelenti, hogy
$$\left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{x+1}\right| < \varepsilon.$$
Így tetszőleges $\varepsilon > 0$ választás esetén, ha
$$x > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = K,$$
akkor
$$|f(x) - 1| < \varepsilon.$$

4. eset. $x_0 = +\infty$, $\alpha = +\infty$.
Legyen $f(x) = x^2$, $D_f = \mathbb{R}$. Belátjuk, hogy
$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty.$$
Valóban, legyen $K \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor $x^2 > K$ azzal ekvivalens, hogy $x > \sqrt{K} = L$.

3.4. Állítás. *(Kompozíció határértéke). Legyenek f, g olyan függvények, melyekre*
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha, \qquad \lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta,$$
ahol α, β, x_0 végesek. Ekkor
$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = \beta.$$

Bizonyítás. Átviteli elv segítségével. Legyen (x_n) sorozat, melyre
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$
Mivel
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \alpha,$$
ezért
$$\lim_{n\to\infty} g(x_n) = \alpha.$$
Hasonlóan, mivel
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta,$$
ezért
$$\lim_{n\to\infty} f(g(x_n)) = \beta,$$
ezzel az állítást beláttuk.

3.5. Állítás. *(Monoton függvények határértékéről.) Legyen $f : X \to Y$ adott függvény és tegyük fel hogy x_0 egy környezetében f monoton nő (kivéve esetleg az x_0-t), azaz létezik olyan $U = (x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$ környezete x_0-nak, melyre minden $x_1, x_2 \epsilon U \setminus \{x_0\}$, $x_1, x_2 \epsilon D_f$ és $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leq f(x_2)$. Ekkor léteznek a*

$$\lim_{x\to x_0+} f(x), \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x)$$

jobb- és baloldali határértékek, éspedig

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \sup(f(x):\ x_0-\varepsilon < x < x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = \inf(f(x):\ x_0 < x < x_0+\varepsilon).$$

Bizonyítás. Triviális.

Megjegyzés. Speciális esetként a fenti állításból következik, hogy ha f monoton nő valamely $(x_0-\varepsilon, x_0)$ intervallumban, akkor

$$\lim_{x\to x_0-} f(x)$$

létezik.

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}},$$

ahol $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. A jobboldali határérték

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$$

kiszámítására a kompozícióra vonatkozó tulajdonságokat használjuk. Mivel

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

ezért

$$\lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0.$$

Baloldali határérték:

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

mivel

$$\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

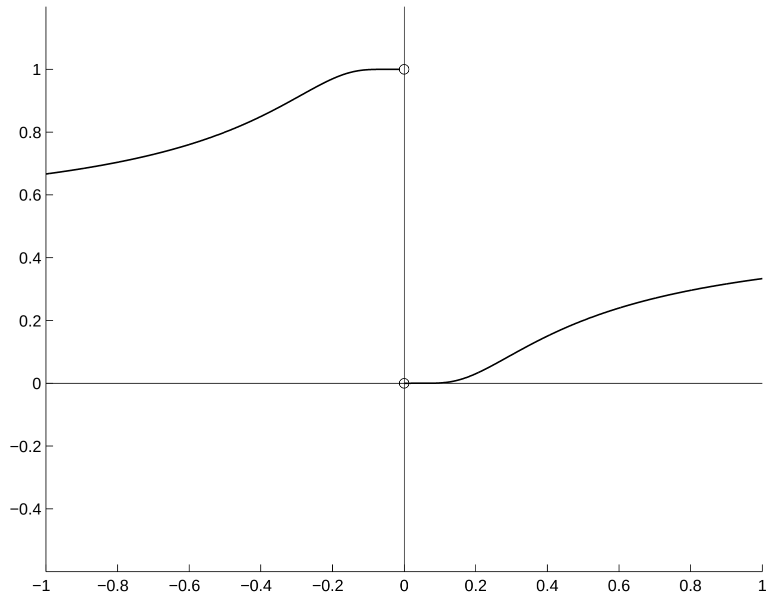
Tehát

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

nem létezik.

Példa. Legyen

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$



3.4. ábra. Az $f(x) = 1/(1 + 2^{1/x})$ függvény grafikonja.

$D_f \epsilon \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

nem létezik. Tekintsük ugyanis az alábbi két sorozatot

$$\frac{1}{x_n} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi,$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi.$$

Ekkor $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, és

$$f(x_n) = 1, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1,$$

$$f(y_n) = -1, \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = -1.$$

Sőt, minden $\alpha \epsilon [-1, 1]$-hez létezik $(z_n(\alpha))$ sorozat, hogy $z_n \to 0$ és $\sin(\frac{1}{z_n}) \to \alpha$.

A határérték monotonitása.

3.6. Állítás. *Legyenek $f : D_f \to \mathbb{R}$ és $g : D_g \to \mathbb{R}$ adott függvények. Tegyük fel, hogy az x_0 pont egy U környezetében igaz, hogy*

$$f(x) \ \leq \ g(x) \qquad \forall x \epsilon U \setminus \{x_0\}.$$

Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \ \leq \ \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Megjegyzés. Ha az állításban a feltétel így szerepel:

$$f(x) \; < \; g(x) \qquad \forall x \epsilon U \setminus \{x_0\},$$

a konklúzió határértékben változatlan:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \; \leq \; \lim_{x \to x_0} g(x)$$

3.7. Állítás. *(Rendőr-elv) Adottak az $f : D_f \to \mathbb{R}$, $g : D_g \to \mathbb{R}$, $h : D_h \to \mathbb{R}$ függvények. Feltesszük, hogy az x_0 egy* **U** *környezetében teljesül, hogy*

$$f(x) \; \leq \; g(x) \; \leq \; h(x), \qquad x \epsilon U, \; x \neq x_0,$$

és tudjuk, hogy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \alpha$$

Ekkor létezik a

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \alpha.$$

határérték is.

Példa. Legyen

$$f(x) = \; x \sin \frac{1}{x} \qquad x \neq 0 \; ,$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, határozzuk meg az

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$$

határértéket. Alkalmazzuk a fenti rendőr-elvet az alábbi szereposztásban:

$$\left. \begin{array}{r} -1 \; \leq \; \sin \frac{1}{x} \; \leq \; 1 \quad \Rightarrow \quad -x \; \leq \; x \sin \frac{1}{x} \; \leq \; x \\ g(x) := -x \\ h(x) := x \end{array} \right\} .$$

Így

$$\lim_{x \to 0} -x = 0 \; \leq \lim_{x \to 0} \; f(x) \; \leq \lim_{x \to 0} x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Példa. Legyen

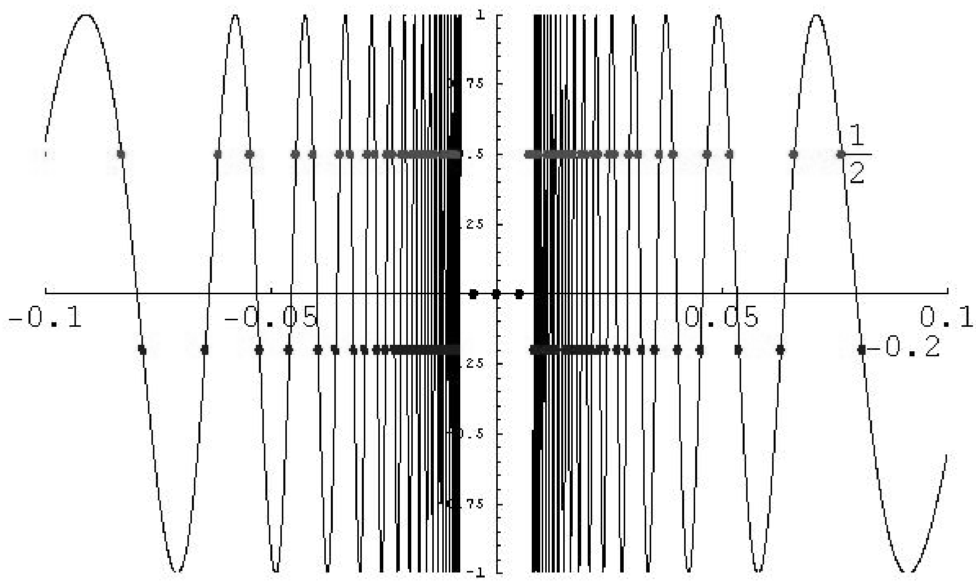
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x},$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Mivel $f(x)$ páros függvény, $f(x) = f(-x)$, elegendő csak jobboldali határértéket vizsgálni. Tegyük fel hogy $x > 0$, elegendő a $x < \frac{\pi}{2}$ intervallumot tekinteni. Itt felhasználjuk az alábbi triviális becsléseket (ld. pl az 3.2. ábrát.)

$$\begin{array}{rcl} \sin(x) & < & x \qquad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \text{tg } (x) & > & x. \end{array}$$



3.5. ábra. Az $f(x) = \sin(1/x)$ függvény a 0 közelében.

Emiatt egyrészt

$$\frac{\sin(x)}{x} < 1, \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2},$$

másrészt

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} > x \;\Rightarrow\; \frac{\sin(x)}{x} > \cos(x).$$

Határértéket véve

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x} > \lim_{x\to 0+} \cos(x) = 1.$$

Következmény.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin(3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5\dfrac{\sin(5x)}{5x}}{3\dfrac{\sin(3x)}{3x}} = \frac{5}{3}.$$

3.8. Állítás. *Az f függvény pontosan akkor folytonos $x_0 \epsilon D_f$-ben ha létezik a $\lim_{x\to x_0} f(x)$határérték, és*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

3.17. Definíció. *Ha f az értelmezési tartomány egy x_0 pontjában nem folytonos, akkor itt szakadási helye van.*

A szakadási helyek fajtái:

1. Elsőfajú szakadás van x_0-ban, ha létezik a

$$\lim_{x\to x_0+} f(x) = f(x_0+0) < \infty, \qquad \lim_{x\to x_0-} f(x) = f(x_0-0) < \infty$$

jobb- és baloldali határértékek.

Speciális esetben x_0 megszüntethető szakadás, ha léteznek a jobb- és baloldali határértékek, ezek megegyeznek, de

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

2. Másodfajú a szakadás, ha nem elsőfajú.

3.2.5. Folytonos függvények tulajdonságai

3.9. Állítás. *Tegyük fel, hogy f folytonos az $x_0 \epsilon\ \mathrm{int}(D_f)$-ben és $f(x_0) > 0$. Ekkor létezik U környezete x_0-nak, melyre*

$$f(x) > 0, \qquad \forall x \epsilon U \cap D_f.$$

Bizonyítás. Legyen $0 < \varepsilon < f(x_0)$. A folytonosság miatt létezik $\delta > 0$, melyre ha $|x - x_0| < \delta$ akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ezen x pontokra tehát

$$0 < f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

3.18. Definíció. *Legyen $f : D_f \to \mathbb{R}$ adott függvény. Azt mondjuk, hogy f folytonos a D_f-en, ha minden $x_0 \epsilon D_f$-re folytonos x_0-ban. (Ekkor a folytonosság definíciójában szereplő δ-ra $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.)*
Ha $D_f = (a, b)$ nyílt intervallum: f folytonos (a, b)-n, ha minden $x_0 \epsilon D_f$-re folytonos x_0-ban.
Ha $D_f = [a, b]$ zárt intervallum: f folytonos, ha folytonos az (a, b) intervallumon, és a végpontokban:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x\to -b} f(x) = f(b).$$

3.2. Tétel. *(Bolzano-tétel) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $f(a) < f(b)$ és legyen $c \epsilon [f(a), f(b)]$. Ekkor létezik olyan $\xi \epsilon (a, b)$, melyre $f(\xi) = c$.*

Bizonyítás. Meghatározzuk azt a ξ pontot, amiről a Bolzano tétel szól.

- Legyen $\xi_1 = \frac{a+b}{2}$. Ha $f(\xi_1) = c$, akkor készen vagyunk. Ha $f(\xi_1) > c$, akkor legyen

  $$a_2 := a_1, \qquad b_2 := c_1.$$

  Ha $f(\xi_1) < c$, akkor legyen

  $$a_2 := c_1, \qquad b_2 := b_1.$$

  . Ekkor az $[a_2, b_2]$ intervallum a következő tulajdonságú: $f(a_2) < c$ és $f(b_2) > c$ és $[a_2, b_2] \subset [a, b]$ éppen a fele.

- Megkonstruáljuk az $[a_3, b_3]$ intervallumot, úgy hogy $f(a_3) < c$ és $f(b_3) > c$ teljesüljön, mint az előbb. Stb.

Ekkor két eset lehetséges:

(i) vagy véges sok lépésben vége van az iterációnak, ekkor megkapjuk a kívánt ξ pontot.

(ii) vagy "nincs vége", ekkor a sorozatokra teljesül, hogy

$$\left\{\begin{array}{ll} (a_n): & f(a_n) < c \\ (b_n): & f(b_n) > c \end{array}\right\}.$$

Belátjuk, hogy $f(\xi) = c$. Vegyük észre, hogy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi \qquad \& \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \xi.$$

Valóban, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \ldots$, és az intervallumok hossza tart a nullához. Ekkor a Cantor-féle közöspont-tétel szerint egyértelműen létezik a ξ közös pont, $\xi\epsilon(a, b)$. Mivel f folytonos ξ-ben ezért minden (x_n) sorozatra, melyre

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \xi \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\xi),$$

ezért

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi), \qquad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi).$$

Emiatt $f(\xi) \le c$ és $f(\xi) \ge c$, ezért $f(\xi) = c$

3.1. Következmény. *Ha f folytonos és $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, akkor f-nek van gyöke $[a, b]$-n, azaz van olyan ξ, hogy $f(\xi) = 0$.*

3.2. Következmény. *Ha $f(x)$ páratlan fokú polinom, akkor biztos, hogy van valós gyöke.*

Megjegyzés. Fontos speciális eset, amikor a függvény értelmezési tartománya $D_f = [a, b]$ korlátos és zárt ($\equiv$ kompakt) halmaz.

3.2.6. Korlátos, zárt halmazon folytonos függvények

3.3. Tétel. *(Weierstrass I. tétele) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f korlátos.*

Bizonyítás. Indirekt módon tegyük fel például, hogy felülről nem korlátos a függvény. Ez azt jelenti, hogy minden n-hez létezik $x_n\epsilon[a, b]$, melyre $f(x_n) > n$. Tekintsük ezt az (x_n) sorozatot. Mivel $a \le x_n \le b$ ezért a sorozat korlátos, tehát létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata (Bolzano-Weierstrass tétel). Erre a sorozatra

$$\lim_{n_k\to\infty} x_{n_k} = \xi.$$

Mivel az $[a, b]$ zárt intervallum, ezért $\xi\epsilon[a, b]$, akkor itt f folytonos, tehát sorozatfolytonos is, ezért

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

de a konstrukció szerint $f(x_{n_k}) > n_k$, ami ellentmondás.

3.4. Tétel. *(Weierstrass II. tétele) Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f felveszi minimumát és maximumát $[a, b]$-n.*

Bizonyítás. Belátjuk például a maximum létezését. Legyen

$$H = \{f(x) : x\epsilon[a, b]\},$$

az előző tétel szerint ez a halmaz korlátos. Ekkor $\beta = \sup(H) < \infty$. Ez azt jelenti, hogy minden n-re létezik $x_n\epsilon[a, b]$, melyre

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \beta.$$

Erre a sorozatra $(x_n) \subset [a, b]$, ezért korlátos, így létezik konvergens (x_{n_k}) részsorozata. Erre a részsorozatra

$$\lim_{n_k\to\infty}(x_{n_k}) = \xi\epsilon[a, b].$$

A sorozatfolytonosság miatt egyrészt

$$\lim_{n_k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi),$$

másrészt

$$\beta - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \leq \beta.$$

Ezért $\beta = f(\xi)\epsilon H$, tehát valóban $\beta = \max(H)$.

3.2.7. Nevezetes határértékek

Példa. Belátjuk, hogy

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Igazolni kell, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik k, hogy ha $x > k$, akkor

$$1 - \varepsilon < x^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon.$$

$x > 1$ esetén nyilván

$$1 < x^{\frac{1}{x}}.$$

Legyen $n = [x]$, ahol $[x]$ az x valós szám egész része, azaz az x-nél nem nagyobb egészek közt a legnagyobb. Ekkor

$$n \leq x < n + 1,$$

ezért

$$x^{\frac{1}{x}} < (n + 1)^{\frac{1}{x}} \leq \sqrt[n]{n + 1}.$$

Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + 1} = 1,$$

ezért létezik N, melyre ha $n > N$, akkor

$$\sqrt[n]{n + 1} < 1 + \varepsilon.$$

Így ha $[x] \geq N$, akkor

$$x^{\frac{1}{x}} < 1 + \varepsilon.$$

Példa. Tekintsük az
$$f(x) = \frac{\log_c x}{x}$$
függvényt, $c > 1$ mellett. Ennek határértéke
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_c x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \log_c x = \lim_{x\to\infty} \log_c(x^{\frac{1}{x}}) = \log_c 1 = 0.$$

Megjegyzés. $0 < c < 1$ esetén triviálisan teljesül, hogy
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_c x}{x} = 0$$

Példa. Az e szám definícióját használva igazolható az alábbi határérték is:
$$\lim_{x\to 0}(1+x)^x = e.$$

Példa. Beláthatjuk, hogy
$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{1}{x} = 1,$$
felhasználva, hogy
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$
Másrészt
$$\lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0,$$
ugyanis legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor
$$\left| x \sin\frac{1}{x} \right| \le |x|$$
miatt $\delta = \varepsilon$ választás jó.

Példa. Legyen $f(x) = a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots + a_0$, p-ed fokú polinom, $a_p > 0$. Ekkor nyilván
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$$
$\forall p$-re, és
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } p \text{ páros} \\ -\infty, & \text{ha } p \text{ páratlan} \end{cases}$$

Példa. Legyen
$$f(x) = \frac{a_p x^p + \ldots + a_0}{b_q x^q + \ldots + b_0},$$
két polinom hányadosa. Tegyük fel, hogy $a_p > 0$, $b_q > 0$. Ekkor
$$\lim_{x\to\infty} f(x) \begin{cases} \dfrac{a_p x^{p-q} + \ldots + a_q + a_{q+1}\frac{1}{x} + \ldots}{b_q + b_{q-1}\frac{1}{x}\ldots} = +\infty, & \text{ha } p > q \\ \dfrac{a_p}{b_q}, & \text{ha } p = q \\ 0, & \text{ha } p < q \end{cases}$$

Példa. Legyen $f(x) = x^x$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = ?$ $u = 1/x$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{1}{u}\right)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{u^{\frac{1}{u}}} = 1$$

Példa. Láttuk, hogy

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

sorozat-határértékként. Belátjuk, hogy a határértéket tekinthetjük a valós számokon keresztül is, azaz

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Valóban,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = \left(1+\frac{1}{[x]}\right)\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]} = e.$$

Hasonlóan,

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to\infty} \left(1-\frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{(1-\frac{1}{u})^u} = \frac{1}{e^{-1}} = e$$

Megjegyzés. Ugyanígy igazolható, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

tetszőleges $a \epsilon \mathbb{R}$ esetén.

Példa. Legyen

$$f(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0},$$

ahol x_0 rögzített szám, $n \epsilon \mathbb{N}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = n x_0^{n-1},$$

felhasználva, hogy $\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$, mert g folytonos.

3.2.8. Egyenletes folytonosság

Emlékeztetünk arra, hogy $x_0 \epsilon D_f$ esetén f folytonossága x_0-ban egy lokális tulajdonság, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ az ismert tulajdonsággal.

Létezik-e olyan függvény, mely "közös" δ-val rendelkezik, $\delta = \delta(\varepsilon)$?

Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 1$, értelmezési tartományként tekintsük a $D_f = [1, 2]$ halmazt. Ha $\varepsilon > 0$ tetszőleges, akkor

$$\left|f(x) - f(x_0)\right| = \left|x^2 + 1 - x_0^2 - 1\right| = \left|(x - x_0)(x + x_0)\right| \le \left|x - x_0\right| \cdot 4.$$

Ezért $\delta = \varepsilon/4$ választás minden x_0-ra jó, hiszen

$$\left|x + x_0\right| \le 4 \qquad \forall x, x_0 \epsilon [1, 2]$$

3.19. Definíció. *Az $f : D_f \to \mathbb{R}$ függvény egyenletesen folytonos D_f-en, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta = \delta(\varepsilon)$, melyre minden $x_1, x_2 \epsilon D_f$ esetén, ha*

$$\left|x_1 - x_2\right| < \delta$$

akkor

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon$$

3.3. Következmény. *Ha f egyenletes folytonos D_f-en, akkor minden $x_0 \epsilon D_f$-re x_0-ban folytonos.*

Példa. Legyen $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = [0, +\infty)$. Belátjuk, hogy f nem egyenletesen folytonos. Megmutatjuk, hogy van olyan ε, melyre minden δ rossz. Valóban, legyen $\varepsilon = 2$. Ekkor tetszőleges $\delta > 0$-hoz létezik n, melyre $\dfrac{1}{n} < \delta$. Legyen ekkor

$$x_1 = n, \qquad x_2 = n + \frac{1}{n},$$

így $|x_1 - x_2| < \delta$. Mégis

$$\left|f(x_1) - f(x_2)\right| = \left|n^2 + 1 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 1\right| = \left|n^2 - n^2 - 2 - \frac{1}{n^2}\right| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Példa. $f(x) = 1/x$, $x \epsilon (0, 1)$. Belátjuk, hogy f nem egyenletesen folytonos. Legyen $\delta > 0$ tetszőleges, ekkor létezik olyan n, melyre

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \delta.$$

Válasszuk a következő két alappontot:

$$x_1 = \frac{1}{n} \quad x_2 = \frac{1}{n+1}.$$

Ekkor

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

és mégis

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1.$$

Tehát tetszőleges δ-hoz megadható két olyan pont, mely közelebb van, mint δ, viszont a függvényértékek eltérése nagyobb, mint például $1/2$.

Példa. Legyen

$$f(x) = \sin(x), \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$$

Belátjuk, hogy egyenletesen folytonos az egész $\mathbb{R}$-en. Ehhez felhasználjuk, hogy

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2}.$$

Ezért

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2|\sin \frac{x - x_0}{2}||\cos \frac{x + x_0}{2}| \leq 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|.$$

Felhasználtuk, hogy $|\sin(\alpha)| \leq \alpha$, $\cos(\beta) \leq 1$. Ebben az esetben a $\delta = \varepsilon$ választás jó x_0-tól függetlenül, tehát a függvény egyenletesen folytonos.

3.5. Tétel. *Ha az $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyenletesen is folytonos. (Az intervallum zárt, és korlátos.)*

Bizonyítás. Indirekt módon. Tegyük fel, hogy létezik olyan $\epsilon > 0$ melyre minden $\delta > 0$ rossz, például $\delta = \frac{1}{n}$ rossz. Ez azt jelenti, hogy léteznek $x_n, y_n \epsilon [a, b]$ számok, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

és mégis

$$|\ f(x_n) - f(y_n)\ | > \epsilon. \tag{3.1}$$

Tekintsük az (x_n) és (y_n) sorozatokat. Ezek korlátosak, tehát léteznek konvergens részsorozataik: $(x_{n_k}), (y_{n_k})$. Ezek határértéke:

$$\lim_{n_k \to \infty} x_{n_k} = x_0, \qquad \lim_{n_k \to \infty} y_{n_k} = y_0.$$

Mivel $|\ x_n - y_n\ | < \frac{1}{n}$ ezért $x_0 = y_0$. Ebben a pontban is folytonos a függvény, tehát sorozatfolytonos is. Ezért

$$\lim_{n_k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0) = \lim_{n_k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(y_0).$$

Ez ellentmondás a (3.1) egyenlőtlenségel.

Megjegyzés. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ megszorítása a $[\delta, 1]$, $(0 < \delta < 1)$ halmazra egyenletesen folytonos.

Megjegyzés. $f(x) = x^2$ megszorítása a $[0, K]$ intervallumra $(K > 0)$ egyenletesen folytonos.

3.6. Tétel. *Legyen $f :\ [a; \infty) \to \mathbb{R}$ folytonos. Tegyük fel, hogy $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$ véges. Ekkor f egyenletesen folytonos.*

Példa. $f(x) = x^5 + 4x^2 + 3$, $D_f = (0, 1]$. Egyenletesen folytonos-e? Igen, hiszen a $[0,\ 1]$ intervallumon egyenletesen folytonos, ezért annak tetszőleges részhalmazán is egyenletesen folytonos.

3.3. Differenciálszámítás

3.3.1. Differenciálhányados

Értelmezni fogjuk egy függvény grafikonjának $P = (x_0; f(x_0))$ ponthoz tartozó érintőjét. Ezt szelővel közelítjük, meredekséget ($\equiv$ iránytangens) adunk meg:

$$m(x) = \operatorname{tg}\, \alpha(x) = \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Ha létezik a fenti $\operatorname{tg}\, \alpha(x)$ határértéke $x \to x_0$ esetén, akkor az érintő létezik, meredeksége a kapott határérték.

3.20. Definíció. *Adott egy $f : H \to \mathbb{R}$ függvény és $x_0 \epsilon D_f$ értelmezési pontjának egy rögzített belső pontja (azaz $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon) \subset D_f$ valamely $\varepsilon > 0$-ra). Az x ponthoz tartozó differenciahányados (különbségi hányados, szlő meredeksége)*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad x \epsilon D_f.$$

A függvény differenciálható x_0-ban, ha a

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

határérték létezik és véges. Ennek a határértéknek elnevezése: derivált, differenciálhányados. Jele: $f'(x_0)$.

Vezessük be a $h = x - x_0$ jelölést. Ekkor $x \to x_0 \iff x - x_0 = h \to 0$. Így a derivált egy ekvivalens definícióját kapjuk:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3.21. Definíció. *A jobboldali derivált:*

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ha a fenti határérték létezik és véges.

3.22. Definíció. *Baloldali derivált:*

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

3.10. Állítás. *f differenciálható x_0-ban $\iff$ $f'_+(x_0)$ és $f'_-(x_0)$ léteznek és megegyeznek,*

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

3.23. Definíció. *$f : (a; b) \to \mathbb{R}$ differenciálható, ha minden $x_0 \epsilon (a, b)$-ban differenciálható.*

3.24. Definíció. *$f : [a; b] \to \mathbb{R}$ differenciálható, ha:*

- *$\forall x_0 \epsilon (a, b)$-ban differenciálható*
- *végpontokban léteznek az egyoldali deriváltak: $f'_+(a)$ és $f'_-(b)$*

Példa. $f(x) = c$, c konstans, $D_f = \mathbb{R}$. Minden $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ belső pontja D_f-nek.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Példa. $f(x) = x$, $D_f = \mathbb{R}$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Példa. $f(x) = x^n$, $n > 1$ természetes szám

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^{n-1} + x_0 x^{n-2} + \ldots + x_0^{n-1}) = n x_0^{n-1},$$

ezt már láttuk.

Példa. $f(x) = \sin(x)$. Ekkor a különbségi hányados:

$$\frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} = \frac{2\sin(\frac{x - x_0}{2})\cos(\frac{x + x_0}{2})}{x - x_0}.$$

Így ennek határértéke:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\frac{x - x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} \lim_{x \to x_0} \cos(\frac{x + x_0}{2}) = 1 \cdot \cos(x_0),$$

mert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(\frac{x - x_0}{2})}{\frac{x - x_0}{2}} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1.$$

3.11. Állítás. *(Átviteli elv deriválhatóságra) $f : H \to \mathbb{R}$, $x_0 \epsilon\ \mathrm{int}(H)$. f pontosan akkor deriválható x_0-ban, ha minden $(x_n) \subset D_f$ sorozatra, melyre $x_n \neq x_0$, létezik az alábbi határérték*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0},$$

amely véges és független a sorozattól.

Példa. $f(x) = |x|$, $D_f = \mathbb{R}$. Ha $x_0 > 0$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1,$$

hiszen ha $x_0 > 0$, akkor a lim-ben is $x > 0$ teljesül egy idő után. Hasonlóan, ha $x_0 < 0$, akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1.$$

Belátjuk az átviteli elv segítségével, hogy $x_0 = 0$-ban a határérték nem létezik. Valóban legyen az egyik 0-hoz tartó sorozat $x_n = 1/n$. A sorozat mentén:

$$\frac{|x_n| - 0}{x_n - 0} \equiv 1.$$

Legyen a másik sorozat $u_n = -1/n$. Ekkor a sorozat mentén

$$\frac{|u_n| - 0}{u_n - 0} \equiv -1.$$

Mivel $f'_-(0)$ és $f'_+(0)$ nem egyeznek meg, ezért nem deriválható az $x_0 = 0$ pontban.

Példa. $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Legyen $x_0 > 0$, $x_n \to x_0$ tetszőleges sorozat.

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{\sqrt{x}_n - \sqrt{x}_0}{(\sqrt{x}_n - \sqrt{x}_0)(\sqrt{x}_n + \sqrt{x}_0)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}_n + \sqrt{x}_0} = \frac{1}{2\sqrt{x}_0}.$$

Ha $x_0 = 0$, akkor eleve csak a $f'_+(0)$ lehetne értelmezhető, de

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{0}} = +\infty$$

nem véges. Tehát az f függvény a $(0, \infty)$ intervallumban deriválható és deriváltja az

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x)}}$$

függvény..

3.3.2. Folytonosság és differenciálhatóság kapcsolata

Láttuk, hogy $f(x)$ folytonos $\not\Rightarrow$ $f(x)$ differenciálható is (ld. $f(x) = |x|$).

3.12. Állítás. *Ha f differenciálható x_0-ban, akkor ott folytonos.*

Bizonyítás. Mivel $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz étezik $\delta > 0$, hogy

$$m - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m + \varepsilon,$$

ha $|x - x_0| < \delta$. Vegyünk $\varepsilon = 1$-et. Azt jelenti, hogy

$$m - 1 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq m + 1,$$

azaz

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < K$$

valamilyen K mellett, ha x elég közel van x_0-hoz. Ezért itt

$$|f(x) - f(x_0)| < K|x - x_0|,$$

amiből a folytonosság következik. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ekkor válasszunk $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$-t. Ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

3.3.3. Differenciálási szabályok

A deriválást tekinthetjük úgy, mint egy hozzárendelést, mely egy differenciálható függvényhez hozzárendeli deriváltfüggvényét:

$$f \mapsto f'.$$

Legyen

$$\mathbf{X} := \left\{ f : f[a,b] \to \mathbb{R}, \quad f \ \text{ differenciálható} \right\}$$

és

$$\mathbf{Y} := \left\{ f : f[a,b] \to \mathbb{R} \right\}.$$

Ekkor a differenciálás művelete egy

$$D : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$$

operátor, amely függvényhez másik függvényt rendel.

3.7. Tétel. *(Differenciálási szabályok) Legyenek f és g differenciálható függvények. Ekkor*

1.

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2.

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

3.

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. Tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$, ekkor

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

5. Tegyük fel, hogy $g(x) \neq 0$, ekkor

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

6. Láncszabály

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Bizonyítás.

3.

$$\begin{aligned}(fg)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left(f(x)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) + g(x_0) \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},\end{aligned}$$

ahonnan felhasználva f folytonosságát következik az állítás.

4.

$$\left(\frac{1}{g(x_0)}\right)' = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{-1}{g(x)g(x_0)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right).$$

6.

$$(f\circ g)'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{x-x_0} =$$
$$= \lim_{x\to x_0}\frac{f(g(x))-f(g(x_0))}{g(x)-g(x_0)}\;\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Példa. $f(x) = \text{tg }(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $f'(x) =?$

$$(\cos(x))' = -\sin(x),$$

$$(\sin(x))' = \cos(x), \qquad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2,$$

mivel itt $\cos(x) = 0$.

$$(\tan(x))' = \frac{\cos(x)\sin(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Példa. $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2+5}$, $f'(x) =?$

Az első tényező deriváltja $(x^2+1)' = 2x+0$. A második tényező összetett függvény, a külső függvény: $g(x) = \sqrt{x}$, $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, a belső függvény: $h(x) = x^2+5$, $h'(x) = 2x+0$. Így

$$(g\circ h)'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+5}}2x.$$

Tehát a szorzat deriváltja:

$$f'(x) = 2x\sqrt{x^2+5} + (x^2+1)\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$$

3.25. Definíció. *Ha az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény deriválható x_0 egy környezetében, és az f' függvény deriválható x_0-ban, akkor ez az eredeti függvény második deriváltja,*

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

Hasonlóképpen értelmezzük a magasabb rendű deriváltakat is. Az n-ed rendű deriváltat így jelöljük: $f^{(n)}(x)$.

Példa. $f(x) = e^x$ függvény deriváltja, $x_0 \epsilon \mathbb{R}$ tetszőleges. Ekkor

$$\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0},$$

ezért

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}.$$

Ez utóbbi határértéket számoljuk ki:

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{\ln t} = \lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(1 + y)},$$

ahol a $t = e^h$ és $y = t - 1$ helyettesítéseket végeztük el. Ennek reciproka

$$\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = \lim_{y \to 0} \ln(1 + y)^{\frac{1}{y}} = \ln e = 1,$$

ezért

$$(e^x)' = e^x.$$

3.8. Tétel. *(Deriválhatóság ekvivalens megfogalmazása) Vezessük be a*

$$\Delta f(x) := f(x + h) - f(x)$$

jelölést. Ekkor f pontosan akkor differenciálható értelmezési tartományának egy belső pontjában, x_0-ban, ha

$$\Delta f(x_0) = Ah + \varepsilon(h)h \tag{3.2}$$

alakban írható, ahol A h-tól független konstans, és

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy f differenciálható. Ekkor

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

miatt

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \varepsilon h.$$

Tegyük fel, hogy (3.2) teljesül. Ekkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{Ah + \varepsilon(h)h}{h} = A.$$

3.3.4. Inverz függvény

3.26. Definíció. *Tegyük fel, hogy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ szigorúan növő, folytonos függvény. Ekkor minden $c \epsilon [f(a), f(b)]$ számhoz egyértelműen létezik $\xi \epsilon [a, b]$, melyre $f(\xi) = c$. (Bolzano tétel.) Ez a $c \mapsto \xi$ leképezés,*

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$$

az inverz függvény.

3.13. Állítás. *A fent definiált inverz függvény is folytonos lesz.*

3.9. Tétel. *Tegyük fel, hogy $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton, differenciálható függvény, melyre $f'(x) \neq 0$, $x \epsilon I$ mellett. Ekkor f^{-1} is differenciálható, és*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Másik felírás: $(f^{-1})'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ ($y_0 = f(x_0)$ jelöléssel)

Bizonyítás. (Vázlat) A differenciálhatóságot bizonyítás nélkül elfogadjuk. Induljunk ki az

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

azonosságból, és deriváljuk x szerint, az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazva. Ekkor

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x))f'(x) = 1,$$

ahonnan a tétel állítása következik.

Példa. Láttuk, hogy az $f(x) = e^x$ függvény deriváltja önmaga, $f'(x) = e^x$. Mivel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ szigorúan monoton növő az egész $\mathbb{R}$-en, ezért létezik az inverze:

$$(e^x)^{-1} = \log_e x =: \ln x,$$

tehát az inverzfüggvény $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Ennek deriváltja

$$\ln'(x) = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Példa. Exponenciális függvény. Legyen $a > 0$, $f(x) = a^x$. Ennek deriváltja $f'(x) =?$

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a},$$

ezért

$$f(x) = e^{x \ln a}$$

és így

$$f'(x) = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a.$$

Az inverze

$$f^{-1}(x) = \log_a x, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

3.3.5. Hiperbolikus függvények

3.27. Definíció. *A sinus hiperbolikus függvényt így értelmezzük:*

$$\mathrm{sh}\,(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad x \epsilon \mathbb{R}.$$

Ennek tulajdonságai:

1. szigorúan monoton növő,
2. az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett,
3. páratlan függvény.

Deriváltja:

$$\mathrm{sh}\,'(x) = \frac{e^x - (e^{-x})(-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

3.28. Definíció. *A cosinus hiperbolikus függvényt így definiáljuk:*

$$\mathrm{ch}\,(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Tulajdonságai:

1. az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett,
2. páros függvény.

Deriváltja:

$$\mathrm{ch}\,'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}\,(x).$$

Tehát ezek a függvények erősen emlékeztetnek a trigonometrikus függvényekre, hiszen

$$\mathrm{sh}\,'(x) = \mathrm{ch}\,(x), \qquad \mathrm{ch}\,'(x) = \mathrm{sh}\,(x).$$

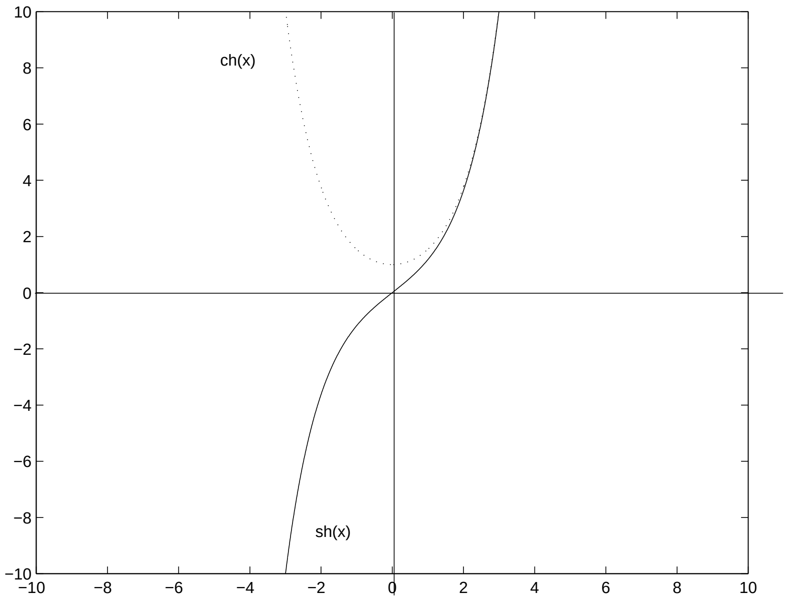
3.14. Állítás.

$$\mathrm{ch}\,^2(x) - \mathrm{sh}\,^2(x) = 1, \quad \forall x - \mathrm{re}.$$

Bizonyítás. A definíciók alapján:

$$\begin{aligned} \mathrm{sh}\,^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} \\ \mathrm{ch}\,^2(x) &= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4}, \end{aligned}$$

ahonnan az állítás következik.



3.6. ábra. A hiperbolikus függvények.

3.29. Definíció. *A tangens hiperbolikus függvényt így definiáljuk:*

$$\text{th }(x) := \frac{\text{sh }(x)}{\text{ch }(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Értelmezési tartománya $D_{\text{th}} = \mathbb{R}$. Megmutatjuk, hogy értékkészlete $R_{\text{th}} = (-1, 1)$. Elsőként belátjuk, hogy $-1 < \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1$. Valóban, ez azt jelenti, hogy

$$\begin{array}{rcccl} -e^x - e^{-x} & < & e^x - e^{-x} & < & e^x + e^{-x} \\ 0 & < & 2e^x, \qquad 0 & < & 2e^{-x} \end{array}$$

Másrészt igaz, hogy

$$\lim_{x \to \pm\infty} = \pm 1,$$

, amiből a Bolzano tétel miatt valóban következik, hogy $R_{\text{th}} = (-1, 1)$.

3.3.6. Trigonometrikus függvények inverzei

$f(x) = \sin(x)$

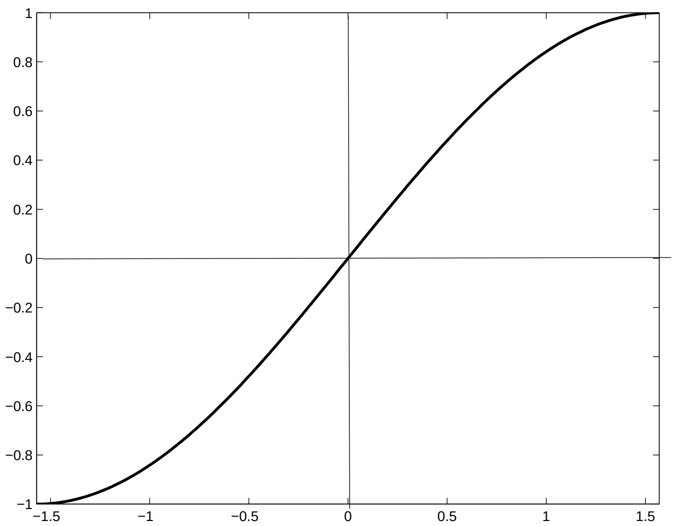
A függvény $x\epsilon[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$-re való megszorítását tekintjük, itt már van inverze.
Az inverzét így jelöljük:

$$f^{-1}(x) = \arcsin(x).$$

$\arcsin: \ [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ennek deriváltja $x \neq \pm 1$ esetén:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

mivel $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, és így $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$.



3.7. ábra. A $\sin(x)$ függvény invertálható megszorítása.

$f(x) = \cos(x)$**.**

Ha $x\epsilon[0,\pi]$, akkor itt szigorúan monoton fogyó, tehát invertálható. Ekkor $f : [0,\pi] \to [-1,1]$, tehát inverze $f^{-1} = \arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$. Az inverz deriváltja $x \neq \pm 1$ esetén:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$f(x) = \mathrm{tg}\ (x)$**.**

Az $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ leszűkítését tekintjük, itt a függvény szigorúan monoton növő, ezért létezik f^{-1}. $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. A tg függvény deriváltja

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - (-\sin(x))\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \mathrm{tg}\ ^2(x). \end{aligned}$$

Az inverz deriváltja

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+\mathrm{tg}\ ^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$f(x) = \mathrm{ctg}\ (x)$**.**

Az $f(x) = \mathrm{ctg}\ (x)$ függvény megszorítását tekintjük, $x\epsilon(0,\pi)$. Ekkor f invertálható, és $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$. A derivált:

$$f'(x) = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = -1 - \mathrm{ctg}\ ^2(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)},$$

és az inverz deriváltja

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{-1 - \text{ctg}^{\,2}(\text{arc ctg}\,(x))} = \frac{-1}{1+x^2}.$$

3.4. Differenciálszámítás alkalmazásai

3.4.1. Középérték tételek

3.30. Definíció. *Legyen $f : X \to Y$ tetszőleges függvény, $x_0 \epsilon D_f$. Az x_0 lokális maximuma f-nek, ha létezik egy U környezete x_0-nak, melyre: $\forall x \epsilon U$, $x \epsilon D_f$ esetén*

$$f(x) \leq f(x_0).$$

Az x_0 lokális minimuma f-nek, ha létezik egy U környezete x_0-nak, melyre: $\forall x \epsilon U$, $x \epsilon D_f$ esetén

$$f(x) \geq f(x_0).$$

A lokális maximum vagy lokális minimum közös neve lokális szélsőérték.

3.31. Definíció. *x_0 globális maximum, ha $\forall x \epsilon D_f$ esetén*

$$f(x) \leq f(x_0).$$

3.10. Tétel. *Legyen $f : X \to Y$, $x_0 \epsilon$ $\text{int}(D_f)$ belső pont. Tegyük fel, hogy f-nek x_0-ban lokális szélsőértéke van és x_0-ban differenciálható. Ekkor*

$$f'(x_0) = 0.$$

Bizonyítás. (pl. lokális maximum esetén) A derivált definíciója szerint

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

A lokális maximum tulajdonsága miatt létezik $\varepsilon > 0$, hogy ha $x \epsilon (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, akkor $f(x) \leq f(x_0)$. Így $x \epsilon (x_0 - \varepsilon, x_0)$ esetén $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \dfrac{(\leq 0)}{(\leq 0)}$, ezért

$$f'(x_0) \geq 0. \tag{3.3}$$

Hasonlóan, ha $x \epsilon (x_0, x_0 + \varepsilon)$, akkor $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \dfrac{(\leq 0)}{(> 0)}$, ezért

$$f'(x_0) \leq 0. \tag{3.4}$$

(3.3)-t és (3.4)-t összevetve $f'(x_0) = 0$.

Megjegyzés. A tétel megfordítása nem igaz. Ha például $f(x) = x^3$, akkor $x_0 = 0$ biztosan nem lokális szélsőérték. Mégis, deriváltja $f'(x) = 3x^2$, és így $f'(0) = 0$.

3.11. Tétel. *(Rolle-tétel) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f*

- *folytonos $[a,b]$-n,*
- *differenciálható (a,b)-n,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Ekkor létezik $\xi \epsilon (a,b)$, melyre $f'(\xi) = 0$

Bizonyítás. Mivel az $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, ezért Weierstrass II. tétele miatt létezik maximuma (M) és minimuma (m). Ha $M = m = f(a) = f(b)$, akkor triviális.

Ha nem, akkor létezik egy olyan $\xi \epsilon (a,b)$ belső pont, melyre $m = f(\xi)$ vagy $M = f(\xi)$. Ekkor az előző tétel miatt $f'(\xi) = 0$.

3.12. Tétel. *(Lagrange-féle középérték-tétel) Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f*

- *folytonos $[a,b]$-n,*
- *differenciálható (a,b)-n.*

Ekkor létezik olyan $\xi \epsilon (a,b)$, melyre:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Az $(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő egyenes egyenlete

$$h(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Legyen

$$g(x) := f(x) - h(x).$$

Ekkor g differenciálható, és

$$g(a) = f(a) - h(a) = 0, \qquad g(b) = f(b) - h(b) = 0,$$

tehát g-re a Rolle-tételt alkalmazva azt kapjuk, hogy létezik ξ, melyre $g'(\xi) = 0$, azaz

$$f'(\xi) = h'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3.13. Tétel. *(Cauchy-féle középérték-tétel) Legyenek $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények. Tegyük fel, hogy $g(b) \neq g(a)$. Ekkor létezik $\xi \epsilon (a,b)$, melyre*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Bizonyítás. HF.

Megjegyzés. A Cauchy-féle középérték-tételnek speciális eseteként $g(x) = x$ választással a Lagrange-tételt kapjuk.

3.14. Tétel. *Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény. Tegyük fel, hogy $f'(x) = 0$ minden $x \epsilon (a,b)$ esetén. Ekkor $f(x) = c$ valamilyen c-re.*

Bizonyítás. Legyenek x_1 és $x_2 \epsilon [a,b]$, $x_1 < x_2$. Tekintsük $f\Big|_{[x_1;x_2]}$ megszorítását. A Lagrange-féle középérték-tételből azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi), \quad \xi \epsilon (x_1; x_2).$$

Mivel $f'(\xi) = 0$ ezért

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) = f(x_1)$$

3.4. Következmény. *(Integrálszámítás I. alaptétele) $g, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenciálható függvények, melyekre $f'(x) = g'(x)$ Teljesül minden $x \epsilon (a,b)$-re. Ekkor*

$$f(x) = g(x) + c, \quad \forall x \epsilon [a,b]$$

valamely $c \epsilon \mathbb{R}$ mellett.

3.15. Tétel. *(L'Hopital szabály) Legyenek f és g differenciálhatóak x_0 egy környezetében (esetleg x_0-ban nem). Tegyük fel, hogy*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \qquad (vagy\ = \infty).$$

Ekkor ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A,$$

akkor

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

Itt $A = \pm\infty$ és/vagy $x_0 = \pm\infty$ is lehet.

Bizonyítás. (Vázlat) Mivel

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)},$$

ezért használhatjuk Cauchy-féle középértéktételt az $[x_0, x]$ (ill. az $[x, x_0]$) intervallumon. Eszerint létezik ξ x és x_0 között, melyre

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Megjegyzés. A $\frac{"\infty"}{"\infty"}$ típusú határértékre is igaz a L'Hopital-szabály.

1. *Példa.* A már ismert határértéket így is kiszámolhatjuk:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1.$$

2. *Példa.* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{1}=\infty$

3. *Példa.*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$

4. *Példa.* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos(x)}{x-\dfrac{\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin(x)}{1}=-1$

3.4.2. Monoton függvények jellemzése

3.16. Tétel. *(Monoton függvények jellemzése) Legyen f egy I intervallumon értelmezett differenciálható függvény. Ekkor*

f *monoton növő* $\Longleftrightarrow f'\geq 0.$

f *monoton fogyó* $\Longleftrightarrow f'\leq 0.$

Bizonyítás. Legyen például f monoton növő. A differenciahányados előjelét vizsgáljuk x_0 környezetében. Ha $x<x_0$, akkor az

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

tört nevezője negatív vagy 0, számlálója negatív, ezért a tört nemnegatív. Ha $x>x_0$, akkor ugyanennek a törtnek számlálója nemnegatív és nevezője pozitív. Emiatt a határértékre is $f'(x_0)\geq 0$ lesz.

3.5. Következmény. *Ha $f'(x)>0$ $\forall\epsilon(a;b)$, akkor a függvény szigorúan monoton növő.*

Megfordítva nem igaz, hiszen pl $f(x)=x^3$ mindenütt szigorúan monoton növő, mégis az $f'(0)=0$.

3.32. Definíció. *Az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konvex, ha minden $a\leq x_1<x_2\leq b$ esetén*

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\leq(1-t)f(x_1)+tf(x_2),\qquad t\epsilon[0,1].$$

A függvény konkáv az I intervallumban, ha $-f$ konvex.

Szemléletesen, ha minden pontban a függvény az érintő fölött van, akkor konvex, ha pedig minden pontban az érintő alatt, akkor konkáv.

3.33. Definíció. *Az $x_0\epsilon D_f$ inflexiós pont, ha itt a függvény konvexből konkávba, vagy konkávból konvexbe vált át.*

Szemléletesen az inflexiós pontban a függvény érintője "átdöfi" a függvény grafikonját.

Példa. Tekintsük az $f(x) = x^3$ függvényt. Ekkor az $x = 0$-ban az érintő $0 \rightarrow$ átdöfi a gráfot. A függvény konvex, ha $xgeq0$, és konkáv, ha $x \leq 0$, az $x = 0$ pontban inflexiója van.

3.17. Tétel. *Legyen* $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *differenciálható függvény. Ekkor:*

- f *konvex* $[a, b]$*-n* $\Leftrightarrow$ f' *monoton növő,*
- f *konkáv* $[a, b]$*-n* $\Leftrightarrow$ f' *monoton csökkenő.*

Bizonyítás. Például konvex esetben, (csak vázlat). Legyen az $[a, b]$ intervallum három pontja $x_1 < x < x_2$. x-et x_1-gyel és x_2-vel összekötve, a konvexitás miatt a meredekségek igy viszonyulnak egymáshoz, $m_1 \leq m_2$, ahol

$$m_1 = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

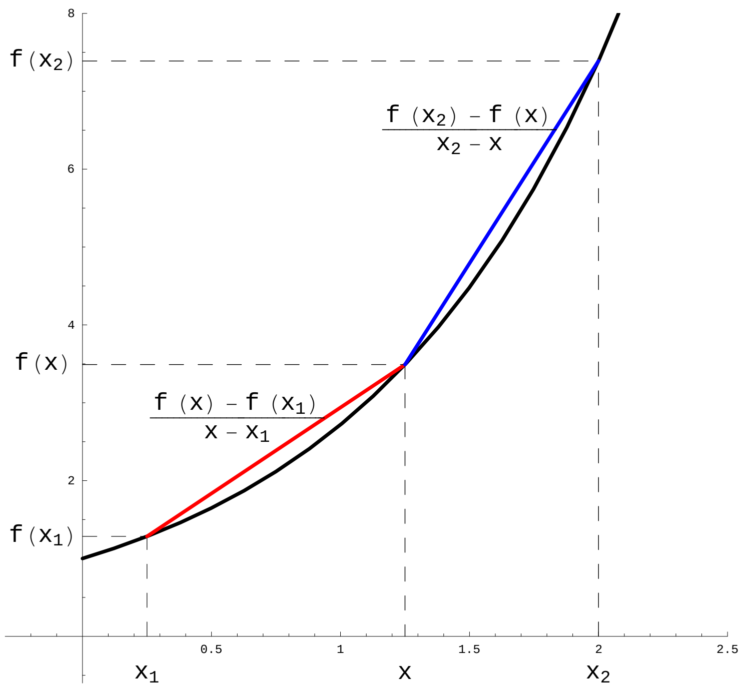
$$m_2 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ekkor

$$m_1(x) \leq m_2(x)$$

miatt

$$\lim_{x \to x_1} m_1(x) = f'(x_1) \leq \lim_{x \to x_2} m_2(x) = f'(x_2).$$



3.8. ábra. Konvex függvény deriváltjának monotonitása.

3.18. Tétel. *Ha az* f *függvény* $f(x_0)$*-ban kétszer differenciálható, és* $f'(x_0) = 0$ *(stacionárius pont), akkor:*

- *ha* $f''(x_0) > 0$, *akkor* x_0 *lokális minimum,*
- *ha* $f''(x_0) < 0$, *akkor* x_0 *lokális maximum,*
- *ha* $f''(x_0) = 0$, *akkor ebből nem eldönthető, vajon* x_0*/ban szélsőértéke van-e a függvénynek.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f''(x_0) > 0$. Ekkor $f''(x) > 0$ az x_0 valamely környezetében is, ezért $f'(x)$ szigorúan monoton nő ebben a környezetben. Mivel $f'(x_0) = 0$, ezért $x < x_0$ esetén $f'(x) < 0$, tehát a függvény itt szigorúan monoton fogy. Hasonlóan $x > x_0$ esetén $f'(x) > 0$, ezért f itt szigorúan monoton nő.

	$x < x_0$	x_0	$x > x_0$
f''	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. minimum	$\nearrow$

Láttuk, hogy ha f konvex, akkor f' monoton nő.

3.19. Tétel.
$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ *konvex* x_0 *környezetében*
$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ *konkáv* x_0 *környezetében*

3.6. Következmény. *Ha* x_0*-ban inflexiós pont van, akkor* $f''(x_0) = 0$

3.15. Állítás. *1. Ha* $f''(x_0) = 0$ *és* f'' *előjelet vált* x_0*-ban, akkor* x_0 *inflexiós pont.*

2. Tegyük fel, hogy f *háromszor deriválható,* $f''(x_0) = 0$ *és* $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ *inflexiós pont.*

3.4.3. Lineáris aszimptota

3.34. Definíció. *Adott* $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ *függvény. Az* f *függvény lineáris aszimptotája* $+\infty$*-ben a* $g(x) = mx + b$, *ha*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty} x(\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x}) = 0.$$

Ha a $g(x)$ lineáris aszimptota, akkor

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m$,
2. Valamint $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = b$

egyaránt végesek.

Példa. $f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$ Van-e lineáris aszimptotája? Egyrészt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{\frac{2}{x}}}{x} = e^0 = 1 = m,$$

másrészt

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(xe^{\frac{2}{x}}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{2}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=(*),$$

helyettesítsünk $t=1/x$-t. Ekkor

$$(*)=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{2t}-1}{2t}2=1\cdot 2=2.$$

Tehát létezik a lineáris aszimptota:

$$g(x)=x+2.$$

3.4.4. Taylor-polinom

Láttuk, hogy ha f differenciálható x_0-ban, akkor

$$f(x)\approx f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0),$$

$\approx$ azt jelenti, hogy közelíthető abban az értelemben, hogy

$$\frac{f(x)-\{f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)\}}{x-x_0}\Longrightarrow 0,\quad \text{ha}\quad x\to x_0.$$

3.35. Definíció. *Legyen x_0 az f függvény értelmezési tartományának belső pontja, itt differenciálható. Legyen*

$$T_1^{x_0}(x):=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0),$$

ez a függvény x_0-hoz tartozó elsőfokú Taylor-polinomja.

Az egyszerűség kedvéért a felső indexben levő x_0 jelölést elhagyjuk.

3.16. Állítás.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0}=0.$$

Megjegyzés. A pontos jelöléssel így kellene írni a Taylor polinomot: $T_1(x;x_0)$, ahol az x_0 rögzített és az x változik.

3.20. Tétel. *Adott $f:X\to Y$, $x_0\epsilon\ \mathrm{int}(D_f)$, feltesszük, hogy f kétszer differenciálható x_0 egy U környezetében. Ekkor minden $x\epsilon U$-hoz létezik ξ, melyre*

$$f(x)-T_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2,$$

ahol

$$\xi\epsilon\begin{cases}(x_0,x) & \text{ha } x>x_0\\ (x,x_0) & \text{ha } x<x_0\end{cases},$$

azaz ξ az x és az x_0 között van.

Megjegyzés. Az $f(x)-T_1(x)$ különbségre vonatkozó formulát Lagrange-féle maradéktagnak hívjuk.

Megjegyzés. $\dfrac{f(x)-T_1(x)}{x-x_0} = f''(\xi)(x-x_0) \to 0$, ha $x \to x_0$.

Példa. Legyen $f(x)=\sin(x)$, $x_0=0$. $T_1(x)=$? Szükséges az $f(x_0)$ és az $f'(x_0)$. $f(x_0)=\sin(0)=0$, $f'(x_0)=\cos(0)=1$. Ekkor $T_1(x)=x$. Legyen $x=0,1$, $\sin(0,1)$-t közelítjük $T_1(0,1)$-el, mennyi hibát vétünk? A különbség:

$$\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2 = \frac{-\sin(\xi)}{2}(0,1)^2,$$

így ennek becslése: $|\sin(x)-T_1(x)| \leq \dfrac{1}{200}$

Azt tudjuk mondani: $\sin(0,1) \approx 0,1 \pm \dfrac{1}{200}$

Tegyük fel, hogy f függvény az x_0-ban és egy környezetében n-szer differenciálható.

3.36. Definíció. *Az f függvény x_0-hoz tartozó n-edik (n-ed rendű) Taylor polinomja*

$$T_n(x,x_0) = T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n.$$

3.37. Definíció. *Az $L_n(x) := f(x)-T_n(x)$ a Lagrange-féle maradéktag.*

Magyarázat. Olyan polinomot keresünk, mely úgy viselkedik x_0-ban, mint $f(x)$. Pontosabban:

$$\begin{aligned} P_n(x_0) &= f(x_0) \\ P_n'(x_0) &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ P_n^{(n)} &= f^{(n)}(x_0) \end{aligned} .$$

(P_n $(n+1)$-dik deriváltja már 0)

3.17. Állítás. *Pontosan egy $P_n(x)$ polinom létezik ezzel a tulajdonsággal.*

Bizonyítás. Az egyértelműség triviális. (HF). Belátjuk, hogy $P_n(x) := T_n(x)$, ugyanis $T_n(x)$ deriváltjai az x_0-ban

$$\begin{aligned} T_n(x_0) &= f(x_0) + f'(x_0)(x_0-x_0) + \ldots + (x_0-x_0)^n = f(x_0) \\ T_n'(x_0) &= 0 + f'(x_0)1 + \frac{f''(x_0)}{2}2(x_0-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}n(x_0-x_0)^{n-1} = \\ &= f'(x_0) \\ &\vdots \\ T_n^{(k)}(x_0) &= \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k! + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{k!}(x_0-x_0)^{n-k} = f^{(k)}(x_0) \end{aligned}$$

3.21. Tétel. *Tegyük fel, hogy f függvény $(n+1)$-szer differenciálható x_0 egy U környezetében. Ekkor létezik olyan $\xi \epsilon U$, melyre:*

$$L_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)},$$

ahol ξ az x és x_0 között van. Ez a Lagrange-féle maradéktag.

Példa. Legyen $f(x) = e^x$, $e^{0,1} =$? A közelítést harmadrendű Taylor-polinommal végezzük, célszerű az $x_0 = 0$ választás.

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3.$$

$$f'(x) = e^x = f''(x) = f'''(x)$$

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 1$$

$$T_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2} + \frac{0,001}{6}.$$

A hiba nagyságrendje:

$$f(x) - T_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4,$$

ahol $0 < \xi < 0,1$ így

$$|L_3(x)| \leq \frac{e^{0,1}}{24}10^{-4} \leq \frac{3}{24}10^{-4}.$$

Tárgymutató