Vonalintegrál

2018. április 26.

Vonal $\mathbb{R}^2$-ben

Jordan görbe. Ismétlés

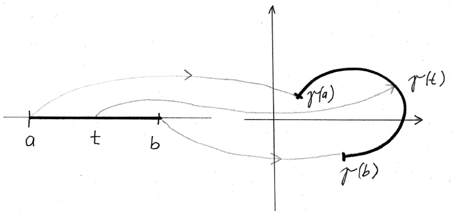
Definíció.

Adott $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$,

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)), \quad t\epsilon[a, b].$$

A függvény ÉK-e JORDAN GÖRBE.

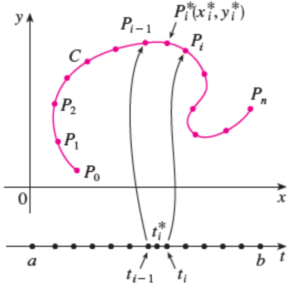
$$\Gamma = \{(\gamma(t)) \ : \ t\epsilon[a, b]\}.$$



Görbe ívhossz

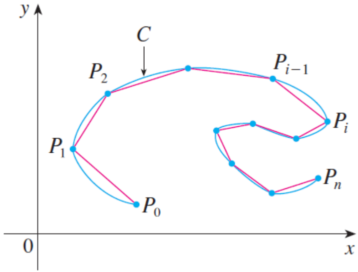
$[a, b]$ egy felosztása: $\mathcal{F}_n = \{a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$.

A görbe a megfelelő pontjai $P_i = (x_i, y_i)$, $x_i = x(t_i)$, $y_i = y(t_i)$



Görbe ívhossz

A görbe ívhosszát közelítjük:



A *i*-edik ívdarab hosszának közelítése:

$$s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}.$$

Így az ívhossz egy közelítése:

$$s(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}.$$

Mi a határérték, ha $\delta := \max(|t_k - t_{k-1}|,\ k = 1, \dots n) \to\ 0$?

Állítás. (Ívhossz kiszámítása)

A Γ SIMA *Jordan görbe ívhossza*

$$\boxed{s(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}$$

Ívhossz kiszámítása

Bizonyítás. (vázlat)

$$s(\mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)^2 + \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}\right)^2} (t_k - t_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\eta_k))^2} \Delta t_k.$$

Határátmenet. $\surd$

Vonalintegrál $\mathbb{R}^2$-ben

Valós függvény vonalintegrálja

Adott a síkban egy Γ Jordan görbe:

$$\Gamma = \{\gamma(t) \ : \ t \epsilon [a, b]\}, \qquad \gamma(t) = (x(t), y(t)).$$

Tfh Γ sima görbe, azaz $x, \ y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálhatók.

Legyen $R \subset \mathbb{R}^2$, melyre $\Gamma \subset R$.

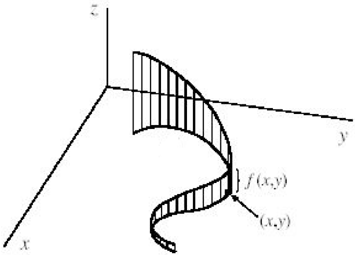
Adott egy $f : R \longrightarrow \mathbb{R}^+$ függvény.

$$\int_\Gamma f(x, y) \, ds?$$

Fizikai interpretáció

1.) Feladat: határozzuk meg az alábbi felület nagyságát:

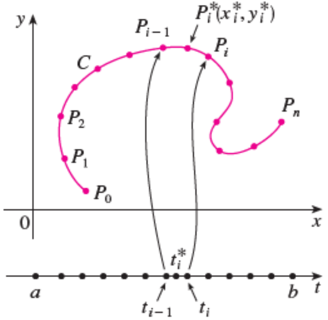
$$S = \{(x(t), y(t), z) \quad | \quad 0 \le z \le f(x(t), y(t)) \text{ és } t \epsilon [a, b]\} .$$



2.) $\Gamma \approx$ hajlított rúd a síkon. A rúd sűrűsége $(x, y) \epsilon \Gamma$ pontban $f(x, y)$. $\implies$ A rúd tömege $\int_\Gamma f(x, y)\, ds$.

Valós függvény vonalintegrálja

$[a, b]$ egy felosztása: $a = t_0 < t_1 \ldots < t_n = b$.



A görbe a megfelelő pontjai

$P_i = (x_i, y_i)$,

$x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i)$

A vonalintegrál közelítése:

$$\int_\Gamma f(x.y)\, ds \approx S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

A felosztáshoz tartozó közelítő összeg:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*) \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta x(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t_i}\right)^2} \Delta t_i$$

Ez alapján a vonalintegrál határátmenettel megkapható:

$$I = \int_{\Gamma} f(x, y)\, ds := \int_{a}^{b} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\, dt.$$

Valós függvény vonalintegrálja

Definíció.

Az f függvény VONALINTEGRÁLJA *a* Γ *görbe mentén:*

$$\int_{\Gamma} f(x,y)ds = \int_{a}^{b} f(x(t),y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$$

Igazolható, hogy a fent definiált vonalintegrál értéke nem függ a görbe paraméterezésétől.

Példa. Speciális eset $f(x,y) \equiv 1$.
Ekkor $\int_{\Gamma} 1ds = s(\Gamma)$, a görbe ívhossza.

Példa

Adott egy félkör alakú rúd.

$\Gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0.\}$

Sűrűsége: $f(x, y) = 1 - y$.

Tömege $\int\limits_\Gamma (1 - y)\, ds$.

Helyettesítés: $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $t \epsilon [0, \pi]$.

Ekkor $ds = \left(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)\right)^{1/2} dt = dt$, ezért

$$\int\limits_\Gamma (1 - y)\, ds = \int\limits_0^\pi (1 - \sin t)\, dt = \pi - 2.$$

Potenciál keresés

Vektormező vonalintegrálja

$F : D \to \mathbb{R}^2$, ahol $D \subset \mathbb{R}^2$. A koordináta függvények

$f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}.$$

Tfh F differenciálható D-ben. Adott $\Gamma \subset D$ Jordan görbe.

$\int\limits_\Gamma F$? *Fizikai háttér:* egy egységnyi tömegű részecske a Γ görbe mentén mozog. Mekkora munkát végez?

Jelölés $\underline{r} = (x, y)$. A vektormező vonalintegrálja:

$$\int\limits_{\Gamma} F(\underline{r})d\underline{r}.$$

Ezt közelítő összegek határértékeként fogjuk értelmezni.

$[a, b]$ egy felosztása $\mathcal{F}_n = \{a = t_o < t_1 < \cdots < t_n = b.\}$

Γ megfelelő pontjai $\underline{r}_i = (x(t_i), y(t_i))$.

Az integrál közelítő összeg

$$I(\mathcal{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} \left\langle F(\underline{r}_i), (\underline{r}_i - \underline{r}_{i-1}) \right\rangle$$

Ezek után a vonalintegrál:

$$\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = \lim_{n\to\infty} I(\mathcal{F}_n),$$

Tétel. (Vonalintegrál kiszámítása)

A fenti jelölésekkel és feltételekkel

$$\begin{aligned} \int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} &= \int_a^b \langle\, F(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\, \rangle dt = \\ &= \int_a^b \big(f_1(\gamma(t))\,\dot{x}(t) + f_2(\gamma(t))\,\dot{y}(t)\big) dt. \end{aligned}$$

Példák: gyakorlatokon.

Primitív függvény keresés

Adott $R \subset \mathbb{R}^2$, és $f : R \to \mathbb{R}$.

Ha f differenciálható a tartományban, akkor deriváltja vektormező: $\mathrm{grad}\, f : R \to \mathbb{R}^2$.

'Fordított' kérdés: Adott $F : R \to \mathbb{R}^2$ vektormező. Van-e olyan $f : R \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre $F = \mathrm{grad}\, f$?

Ha a válasz *igen*, akkor *az F vektormezőnek van potenciálja*.

Ekkor a vektormező POTENCIÁLOS.

Tfh F-nek *van potenciálja*. Γ egy sima görbe, mely $\Gamma \subset R$.

Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \\
&= \int_a^b \langle \mathrm{grad}\, f(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle dt = \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t))dt = \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

Ha a görbe zárt, akkor $\gamma(a) = \gamma(b)$, és így az integrál 0.

$$\oint_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$

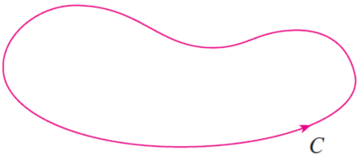
Tétel.

$R \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány.

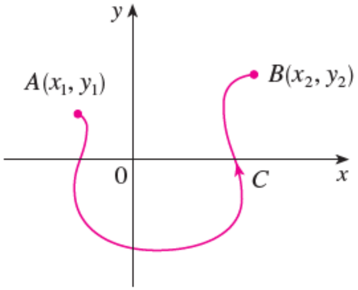
Az F vektormezőnek pontosan akkor létezik potenciálja, ha

$\forall \Gamma \subset R$ *zárt görbére*

$$\oint_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r} = 0.$$



Következmény. Ha F potenciálos, akkor a vektormező vonalintegráljának értéke csak a görbe végpontjaitól függ.



Nevezetesen, ha adott két pont, akkor bármely őket összekötő görbe mentén a $\int_\Gamma F(\underline{r})d\underline{r}$ vonalintegrál értéke ugyanaz.